

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

C. L. GAUDFERNAU

1^{re} THÈSE

PHOTÉLASTICITÉ TRIDIMENSIONNELLE
ASPECTS THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTAUX

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

APPLICATION DES MACHINES À CALCULER MODERNES AU CALCUL DES CONTRAINTES
À PARTIR DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DE LA PHOTOÉLASTICIMÉTRIE

Soutenues le 21 juin 1955, devant la Commission d'Examen

<i>Jury</i> {	MM. THIRY	<i>Président.</i>
	LUCAS	{ <i>Examineurs.</i>
	MALAVARD	

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

C. L. GAUDFERNAU

1^{re} THÈSE

PHOTOÉLASTICITÉ TRIDIMENSIONNELLE
ASPECTS THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTAUX

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

APPLICATION DES MACHINES A CALCULER MODERNES AU CALCUL DES CONTRAINTES
A PARTIR DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DE LA PHOTOÉLASTICIMÉTRIE

Soutenues le 21 juin 1955, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. THIRY	{	Président.
		LUCAS		Examineurs.
		MALAVARD		

PHOTOÉLASTICITÉ TRIDIMENSIONNELLE
ASPECTS THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTAUX



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547110_0045

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	LAPORTE	T	Physique générale et Radio-activité.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.	JANET	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.
R. LÉVY	T	Physiologie comparée.	PETIT	T	Biologie maritime.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
PAUTHENIER	T	Electrotechnique générale.	GALLIEN	T	Embryologie.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	EICHHORN	T	Biologie végétale (P.C.B.).
JOB	T	Chimie générale.	DE CUGNAC	T	Biologie végétale (P.C.B.).
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	M ^{lle} CAUCHOIS.	T	Chimie-Physique.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	THELLIER	T	Physique du Globe.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	AUDUBERT	T	Electrochimie.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	L'HERITIER	T	Génétique.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	GRIVET	T	Radio-électricité.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	PONCIN	T	Mécanique des fluides.
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	THIBY	T	Mécanique appliquée.
J. BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
M ^{me} JULIOT-CURIE	T	Physique nucl. et Radioact.	QUELET	T	Chimie organique.
PLANTEFOL	T	Botanique.	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CABANNES	T	Recherches physiques.	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés.	CUVILLIER	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	JUNG	T	Pétrographie.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.	TRILLAT	T	Chimie-Physique.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	WIEMANN	T	Chimie (M.P.C.).
WYART	T	Minéralogie.	JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste.
TEISSIER	T	Zoologie.	VASSY		Physique de l'atmosphère.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	DESTOUCHES		Théories physiques.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	M. PRUVOST	T	Géologie.
MONNIER	T	Physiologie des fonctions.	AMIEL	T	Chimie (P.C.B.).
PIVETEAU	T	Géologie.	HOCART	T	Minéralogie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).	J. P. MATHIEU.	T	Physique (P.C.B.).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.B.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.	MAY		Biologie animale (P.C.B.).
FAVARD	T	Mécanique générale.	CHOQUET	T	Calc. diff. et intégral.
COULOMB	T	Physique du Globe.	FELDMANN		Biologie (P.C.B.).
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).	GUINIER	T	Physique (P.C.B.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.	JOST	T	Biologie (P.C.B.).
P. DRACH	T	Zoologie.	FORTET		Calcul des probabilités.
KASTLER	T	Physique.	SCHWARTZ	T	Méthode mathématique de la physique.
EPHRUSSI	T	Génétique.	CHOUARD	T	Physiologie végétale.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.	MALAVARD	T	Aviation.
RIVIERE	T	Géologie (S.P.C.N.).	BRELOT	T	Calcul différentiel.
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).	NORMANT	T	Chimie (P.C.B.).
LUCAS	T	Physique.	BENARD		Chimie (P.C.B.).
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.	BUVAT		Botanique (E.N.S.).
ARNULF	T	Optique appliquée.	DUGUE		Statistiques mathématiques.
M. MORAND	T	Physique.	GELOSO		Chimie (P.C.B.).
SOLEILLET	T	Physique.	SOULAIRAC		Psychophysiologie.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.	ULRICH		Physiologie végétale.
DANJON	T	Astronomie.	MARECHAL	T	Optique théorique et appl.
FROMAGEOT	T	Chimie biologique.	KIRRMANN	T	Théories chimiques.
			CHADEFAUD		Botanique.
			DESTRIAU		Physique (M.P.C.).
			M ^{me} LE BRETON		Physiologie générale.
			SALEM		Mathématiques générales

Secrétaire Général Ch. MONIER

A mon mari

La partie expérimentale du présent travail a été faite au Laboratoire de l'École de Physique et Chimie Industrielle dont je tiens à remercier vivement le Directeur, M. le Professeur LUCAS, qui a bien voulu m'accueillir et patronner mes études. Je remercie M. le Professeur LE BOITEUX qui, par ses publications, par ses réalisations, et surtout par ses conseils remarquablement lucides, m'a permis d'atteindre la présente phase.

Je remercie M. MARTIN, Chef de Travaux à l'École de Physique et Chimie, pour le concours continuuel qu'il m'a apporté dans la réalisation des expériences.

Je remercie vivement la Direction de l'Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques pour m'avoir autorisée à poursuivre ce travail parallèlement aux études dont j'ai la charge; enfin, c'est à l'O.N.E.R.A. que je dois la connaissance du calculateur électronique Gamma III Bull qui équipe le groupe que je dirige. C'est sur ce calculateur que j'ai eu la possibilité de mettre au point les programmes contenus dans le présent travail.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

	PAGES
1 Introduction	1
1,1 Photoélasticité plane.....	1
1,2 Photoélasticité à trois dimensions	1
1,3 Objet de l'étude	2

CHAPITRE II

2 Évolution de la photoélasticité	4
2,1 Rappels des résultats de la théorie de l'élasticité — Méthodes expérimentales à deux dimensions	4
2,1.1 Théorie de l'élasticité linéaire — Rappels	4
2,1.1.1 Déformations	4
2,1.1.2 Contraintes	7
2,1.1.3 Équations de liaison entre déformations et contraintes....	9
2,1.1.4 Solutions	10
2,1.2 Photoélasticité plane	11
2,1.2.1 Bases de la photoélasticité	11
2,1.2.2 Le figeage	13
2,1.2.3 Méthode de FAVRE-MESNAGER, ou du feuillet	15
2,1.2.4 Méthode de la lumière diffuse	17
2,2 Sens de l'évolution	19
2,2.1 Extension des méthodes expérimentales vers les états tridimensionnels.....	19
2,2.1.1 Méthodes par figeage	19
2,2.1.2 Méthode par lumière diffuse	22
2,2.2 Extension de la théorie de l'élasticité	23

CHAPITRE III

3 Méthode directe en photoélasticité à trois dimensions	25
3,1 Principe.....	25
3,1.1 Recherche des axes optiques	27
3,1.2 Détermination des directions principales	27
3,1.3 Détermination des axes principaux	28

	PAGES
3,2 Aspect théorique	29
3,2.1 Relation générale liant les axes optiques aux axes principaux ...	29
3,2.2 Cas particulier des plans principaux	34
3,2.3 Résolution	35
3,3 Aspect expérimental et mise au point	37
3,3.1 Mise au point de la méthode	37
3,3.2 Interpolation graphique	40
3,3.3 Précision des mesures	41
3,3.4 Processus opératoire	42
3,4 Détermination des valeurs des contraintes sur un élément d'orientation donnée au moyen du cercle de MOHR	42

CHAPITRE IV

4 Application de la méthode à un exemple de poutre en torsion.....	46
4,1 Étude théorique.....	46
4,1.1 Contraintes	46
4,1.2 Centre de torsion — Critères de définition.....	48
4,1.3 Détermination du centre de torsion — Comparaison des définitions	49
4,2 Résultats expérimentaux	50

CHAPITRE V

5 Conclusion	54
BIBLIOGRAPHIE	55
<i>Note sur les programmes de calcul</i>	63
Planches I à XV	65 à 86

CHAPITRE PREMIER

1

INTRODUCTION

1,1

PHOTOÉLASTICITÉ PLANE

Dans les états plans de contraintes les méthodes photoélastiques classiques donnent en chaque point la direction et la grandeur de la contrainte suivant une direction quelconque :

— par exemple, le tracé des isoclines indique l'orientation des contraintes principales.

La grandeur des contraintes principales est donnée par intégration le long des isostatiques, à partir d'un point du contour.

La biréfringence, proportionnelle en tout point à la différence des contraintes principales, donne la grandeur de la contrainte au point choisi du contour.

Des contraintes principales, on arrive enfin, par les propriétés des cercles de MOHR, à la contrainte suivant une direction quelconque.

1,2

PHOTOÉLASTICITÉ A TROIS DIMENSIONS

L'extension des méthodes photoélastiques classiques aux cas généraux à trois dimensions se heurte à une difficulté insurmontable, par examen direct du modèle, dès que les variations de contraintes, suivant l'épaisseur traversée, ne sont plus négligeables.

Il faut alors se résoudre à « découper » le modèle plus ou moins artificiellement. Les méthodes récentes, dites « de la lumière diffuse », résolvent élégamment cette difficulté par déplacement optique de la tranche éclairée. Les techniques de figeage des contraintes proposent une méthode plus triviale par découpage pur et simple du modèle, mais c'est la méthode proposée par le Professeur FAVRE du feuillet plan photoélastique qui nous semble la plus simple et sans doute la plus sûre, lorsqu'elle est utilisée avec deux variétés convenables de plexiglas : le feuillet plan photoélastique est inclus dans un modèle non photoélastique.

Si un aspect important du problème tridimensionnel est ainsi résolu par la technique du feuillet, la détermination des trois contraintes principales en un point de cette tranche mince est un problème qui n'a reçu de solution à peu près satisfaisante que tout récemment. Une méthode d'itération physique permet, par exemple, d'accéder aux directions des contraintes principales (JESSOP). Plusieurs méthodes donnent leur grandeur par intégration assez complexe à partir des contours. Toutes ces solutions sont encore à l'étude et paraissent assez malaisées à manier.

Dans le présent travail nous donnons une méthode générale de recherche des contraintes en un point du feuillet :

a) recherche des axes optiques; les directions conjuguées des plans de section circulaire de l'ellipsoïde de LAMÉ sont confondues avec les axes optiques : on en déduit les directions des contraintes principales;

b) mesure des biréfringences correspondant à deux des directions principales *du point considéré*;

c) un réseau de courbes fourni dans le texte donne immédiatement les contraintes principales;

d) pour les mesures précises et dans les cas fréquents où l'on désire connaître un grand nombre de points, une résolution numérique, que nous avons programmée sur calculateur électronique, ne demande que quelques dizaines de secondes par point et un prix de revient minime.

Notre méthode de détermination des contraintes est donc purement « locale » : les mesures optiques nécessaires sont effectuées sur le point que l'on calcule; les erreurs possibles n'affectent ainsi que le point calculé. Outre, les calculs n'exigent pas, comme nous le verrons, la connaissance de la constante de BREWSTER;

e) une extension du cercle de MOHR aux problèmes à trois dimensions, proposée par le Professeur LE BOITEUX, donne éventuellement la contrainte suivant une orientation quelconque.

1,3

OBJET DE L'ÉTUDE

Nous nous sommes employés dans la présente méthode générale à rechercher une technique de mesure très systématique; nous pensons qu'elle permet d'accroître considérablement le rendement et l'efficacité de la méthode photoélastique. Nous n'avons pas hésité à faire appel aux techniques modernes du calcul numérique automatique qui sont maintenant à la portée de tout ingénieur : l'application que nous en faisons ne se propose que d'en montrer la puissance à propos d'un problème physique pratique.

Il nous a donc paru intéressant de développer complètement notre méthode sur le plan théorique et sur le plan expérimental. Nous avons fait suivre cet exposé d'une application concrète à un cas tridimensionnel-type, de poutre en torsion; nous donnons par ailleurs une expression analytique des contraintes sur cette poutre.

L'expérimentation fut rendue malaisée par l'absence de suspension à la CARDAN qu'il ne nous a pas encore été possible de faire réaliser. Il est à noter

qu'une telle suspension est nécessaire dans toutes les méthodes à trois dimensions, lumière diffuse exceptée.

Nous n'avons pas encore appliqué notre méthode à la technique du figeage mais nous croyons cette technique moins sûre que celle du feuillet.

L'exposé théorique de la méthode nouvelle est précédé d'un rappel très rapide de l'élasticité linéaire et des méthodes habituelles de photoélasticité plane.

Nous n'avons pas exposé dans le présent travail l'application de notre méthode à un état plan de contraintes : il serait utile d'y songer dans un laboratoire de photoélasticimétrie où l'application systématique d'une seule méthode, dans tous les cas, serait susceptible d'accroître le rendement.

ÉVOLUTION DE LA PHOTOÉLASTICITÉ

2,1 RAPPEL DES RÉSULTATS DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ MÉTHODES EXPÉRIMENTALES A DEUX DIMENSIONS

2,1.1 Théorie de l'élasticité linéaire — Rappels.

Le solide soumis à une modification permanente d'un état de charge « répond » sous deux aspects :

- modification de l'état dimensionnel ou déformation;
- modification de l'état d'équilibre des forces interne ou contraintes;

déformations et contraintes sont liées; la relation de liaison est linéaire en élasticité linéaire.

2,1.1.1 DÉFORMATIONS.

Les déformations, ou variations de la forme du solide, sont caractérisées au moyen des paramètres usuels de la mécanique rationnelle, extension, glissement en élasticité, translation, rotation en mécanique du solide.

Extension.

Étant donné un couple de points $P_0 P'_0$, de coordonnées :

$$\begin{aligned} x & \quad x + dx, \\ y & \quad y + dy, \\ z & \quad z + dz, \end{aligned}$$

avant déformation, ce couple occupe après déformation une position $P_1 P'_1$:

$$P_1 \begin{vmatrix} x + u \\ y + v \\ z + w \end{vmatrix} \quad P'_1 \begin{vmatrix} x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ z + dz + w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{vmatrix}$$

L'extension est, par définition, l'accroissement relatif de longueur de $P_0 P'_0$:

$$S = \frac{\overline{P_1 P'_1} - \overline{P_0 P'_0}}{\overline{P_0 P'_0}},$$

de composantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz,$$

où l_0, m_0, n_0 étant les cosinus directeurs de $P_0 P'_0$:

$$l_0 \frac{\partial u}{\partial x} + m_0 \frac{\partial u}{\partial y} + n_0 \frac{\partial u}{\partial z} = l_0 s_x + m_0 \frac{\partial u}{\partial y} + n_0 \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$l_0 \frac{\partial v}{\partial x} + m_0 \frac{\partial v}{\partial y} + n_0 \frac{\partial v}{\partial z} = l_0 \frac{\partial v}{\partial x} + m_0 s_y + n_0 \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$l_0 \frac{\partial w}{\partial x} + m_0 \frac{\partial w}{\partial y} + n_0 \frac{\partial w}{\partial z} = l_0 \frac{\partial w}{\partial x} + m_0 \frac{\partial w}{\partial y} + n_0 s_z;$$

s_x, s_y, s_z étant les extensions suivant des directions parallèles aux axes :

$$s_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad s_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad s_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Glissement.

Deux segments orthogonaux parallèles aux axes Ox, Oy avant déformation, font entre eux, après déformation, un angle dont le cosinus σ_{xy} s'exprime par :

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

De même, pour les autres axes :

$$\sigma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

$\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ caractérisent les glissements suivant les axes.

Déformation totale.

La déformation totale en P s'exprime complètement en fonction des extensions s_x, s_y et s_z et des glissements $\sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$.

Considérant deux segments $P_0 P'_0$ et $P_0 P''_0$ orthogonaux avant déformation :

$$\begin{array}{ccc} \left. \begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array} \right\} P_0 & \left. \begin{array}{c} x'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{array} \right\} P'_0 & \left. \begin{array}{c} x''_0 \\ y''_0 \\ z''_0 \end{array} \right\} P''_0 \end{array}$$

qui ont, après déformation, les coordonnées :

$$\begin{array}{l} P_1 \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_0 + u, \\ y_1 = y_0 + v, \\ z_1 = z_0 + w, \end{array} \right. \\ \\ P'_1 \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x'_0 + u + \frac{\partial u}{\partial x} (x'_0 - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y} (y'_0 - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z} (z'_0 - z_0), \\ y'_1 = y'_0 + v + \frac{\partial v}{\partial x} (x'_0 - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y} (y'_0 - y_0) + \frac{\partial v}{\partial z} (z'_0 - z_0), \\ z'_1 = z'_0 + w + \frac{\partial w}{\partial x} (x'_0 - x_0) + \frac{\partial w}{\partial y} (y'_0 - y_0) + \frac{\partial w}{\partial z} (z'_0 - z_0), \end{array} \right. \\ \\ P''_1 \left\{ \begin{array}{l} x''_1 = x''_0 + u + \frac{\partial u}{\partial x} (x''_0 - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y} (y''_0 - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z} (z''_0 - z_0), \\ y''_1 = y''_0 + v + \frac{\partial v}{\partial x} (x''_0 - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y} (y''_0 - y_0) + \frac{\partial v}{\partial z} (z''_0 - z_0), \\ z''_1 = z''_0 + w + \frac{\partial w}{\partial x} (x''_0 - x_0) + \frac{\partial w}{\partial y} (y''_0 - y_0) + \frac{\partial w}{\partial z} (z''_0 - z_0), \end{array} \right. \end{array}$$

et tenant compte des conditions d'orthogonalité, la déformation totale en P s'exprime par :

$$\begin{aligned} s_{P'} &= l_0^2 s_x + m_0^2 s_y + n_0^2 s_z + l_0 m_0 \sigma_{xy} + m_0 n_0 \sigma_{yz} + n_0 l_0 \sigma_{zx}, \\ \sigma_{P'P''} &= 2 l_0 l'_0 s_x + 2 m_0 m'_0 s_y + 2 n_0 n'_0 s_z + (l_0 m'_0 + l'_0 m_0) \sigma_{xy} \\ &\quad + (m_0 n'_0 + m'_0 n_0) \sigma_{yz} + (n_0 l'_0 + n'_0 l_0) \sigma_{zx}. \end{aligned}$$

Quadrique des déformations.

PP' étant un couple de points avant déformation, la quadrique de CAUCHY est définie comme lieu d'un point Q situé sur PP' à une distance :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{s_{P'}}},$$

où $s_{P'}$ définit l'extension suivant PP' .

Lorsque PP' prend toutes les orientations possibles, Q décrit la quadrique d'équation :

$$x^2 s_x + y^2 s_y + z^2 s_z + xy \sigma_{xy} + yz \sigma_{yz} + zx \sigma_{zx} = 1,$$

quadrique possédant un groupe de trois axes principaux pour lesquels la déformation se réduit à une extension. Les glissements correspondants sont nuls.

La déformation s'exprime alors de façon plus simple, en fonction des « extensions principales » s_1 , s_2 et s_3 , par :

$$\begin{aligned} s_{P'} &= l^2 s_1 + m^2 s_2 + n^2 s_3, \\ \sigma &= 2 ll' s_1 + 2 mm' s_2 + 2 nn' s_3. \end{aligned}$$

Des extensions on déduit la dilatation cubique θ :

$$\theta = s_1 + s_2 + s_3 = s_x + s_y + s_z.$$

2.1.1.2 CONTRAINTES.

A la réponse « géométrique » ainsi définie, s'ajoute une réponse en efforts intérieurs.

Si, dans un solide soumis à un ensemble de forces, nous isolons en un point P un élément de surface dS , de normale $\vec{n}$ (orientée positivement vers la droite) ⁽¹⁾, l'action des éléments du solide situés à droite de dS sur les éléments situés à gauche s'appelle un effort. La contrainte est par définition la limite du quotient de cet effort par dS lorsque dS diminue indéfiniment. C'est donc une force par unité de surface.

L'écriture au moyen de laquelle les contraintes sont exprimées utilise deux lettres entre parenthèses : notation (i, j) , où :

— i définit l'orientation d'un élément de surface de normale $\vec{i}$, sur lequel s'exerce la contrainte;

— j définit l'axe de projection sur lequel on projette la contrainte.

Ainsi, la contrainte σ relative à l'élément dS de normale $\vec{n}$, aura pour composantes :

(nn) : composante normale;

(nt) : composante tangentielle;

(nx) , (ny) , (nz) : projections de σ sur les trois axes de coordonnées.

L'équilibre d'un six faces élémentaire sous l'influence des contraintes et des forces extérieures (les forces de pesanteur étant négligées) permet de démontrer le théorème de GAUCHY : $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ étant les contraintes sur deux éléments de surface en P, dS et dS' , de normales $\vec{n}$ et $\vec{n}'$:

$$\vec{F} \cdot \vec{n}' = \vec{F}' \cdot \vec{n},$$

d'où l'on déduit :

$$(xy) = (yx),$$

$$(yz) = (zy),$$

$$(zx) = (xz).$$

Contrainte sur un plan quelconque.

En considérant un tétraèdre élémentaire de sommet O ayant trois faces sur les plans de coordonnées suivant xOy , yOz , zOx , la quatrième face étant le plan Q de

(1) Cette orientation arbitraire correspond au choix d'un signe des efforts : les efforts positifs caractérisent les tractions, les efforts négatifs les compressions.

normale r (l , m , n), les équations d'équilibre du tétraèdre permettent de calculer les composantes de la tension sur les axes de coordonnées :

$$(qx) = l (xx) + m (yx) + n (zx),$$

$$(qy) = l (xy) + m (yy) + n (zy),$$

$$(qz) = l (xz) + m (yz) + n (zz),$$

ou sur la normale au plan :

$$(qr) = l (qx) + m (qy) + n (qz),$$

et la composante tangentielle dans le plan :

$$(qt) = l' (qx) + m' (qy) + n' (qz),$$

avec :

$$ll' + mm' + nn' = 0.$$

Quadriques des contraintes.

Deux représentations géométriques dont la genèse est analogue à celle de la quadrique des déformations permettent de traduire les relations précédentes, c'est-à-dire l'évolution de la contrainte en fonction de l'orientation de l'élément de surface dS .

La *quadrique de CAUCHY*, dont le rayon vecteur est inversement proportionnel à la racine carrée de la contrainte normale, peut être soit un ellipsoïde (l'état de contrainte est une tension, ou une compression), soit deux hyperboloïdes conjugués (l'état de contrainte change de signe et la contrainte normale s'annule).

On possède ainsi une représentation géométrique permettant de connaître signe et grandeur de la contrainte normale, grandeur de la contrainte totale, direction et grandeur des contraintes principales (si une contrainte suivant un élément est normale à cet élément, elle est dite « contrainte principale »).

L'*ellipsoïde de LAMÉ* a pour rayon vecteur la contrainte totale, possède, comme la quadrique de CAUCHY, trois axes principaux — qui sont les mêmes — et s'accompagne d'une quadrique directrice. Il permet de connaître la grandeur de la contrainte, la direction du plan correspondant, et les contraintes principales.

Relation entre les contraintes et les forces appliquées.

L'état d'équilibre d'un six faces élémentaire soumis aux contraintes et aux forces extérieures de résultante X_0 , Y_0 , Z_0 , se traduit par les relations suivantes :

$$\frac{\partial (xx)}{\partial x} + \frac{\partial (yx)}{\partial y} + \frac{\partial (zx)}{\partial z} + \rho X_0 = 0,$$

$$\frac{\partial (yx)}{\partial x} + \frac{\partial (yy)}{\partial y} + \frac{\partial (zy)}{\partial z} + \rho Y_0 = 0,$$

$$\frac{\partial (zx)}{\partial x} + \frac{\partial (zy)}{\partial y} + \frac{\partial (zz)}{\partial z} + \rho Z_0 = 0,$$

où ρ est la masse spécifique.

2.1.1.3 ÉQUATIONS DE LIAISON ENTRE DÉFORMATIONS ET CONTRAINTES.

L'examen des différents aspects de la réponse du solide à l'application de forces extérieures nous a conduits à définir : trois extensions, trois glissements et trois composantes de la contrainte — suivant chacun des plans de coordonnées —, soit quinze paramètres.

Or, l'état déformé ou contrainte d'un solide n'admet pas plusieurs positions d'équilibre possibles, et des équations de liaison doivent être mises en évidence, s'appuyant, soit sur des propriétés physiques des solides étudiés, soit sur les équations d'équilibre des solides.

L'évaluation du travail fourni par les contraintes lors d'une petite variation des dimensions d'un six faces élémentaire fait apparaître la forme différentielle linéaire suivante :

$$dW = (xx) ds_x + (yy) ds_y + (zz) ds_z + (yz) d\sigma_{yz} + (zx) d\sigma_{zx} + (xy) d\sigma_{xy}.$$

D'autre part, la loi de HOOKE ou de la linéarité des déformations en fonction des efforts, qui est une loi d'observation, valable sous certaines conditions de limites et de précision, permet d'appliquer au travail dW le principe de la conservation de l'énergie. Ce travail dW est alors la différentielle exacte de la fonction W qui a la forme générale :

$$W = \lambda_{11} s_x^2 + \lambda_{22} s_y^2 + \lambda_{33} s_z^2 + \lambda_{44} \sigma_{yz}^2 + \lambda_{55} \sigma_{zx}^2 \\ + \lambda_{66} \dots 2 \lambda_{23} s_x s_y \dots 2 \lambda_{24} s_x \sigma_{yz} \dots + 2 \lambda_{36} s_z \sigma_{xy}.$$

W doit satisfaire aux conditions d'isotropie et d'équivalence entre glissements et allongements :

$$W = \frac{1}{2} \lambda (s_x + s_y + s_z)^2 + \mu (s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \frac{1}{2} \mu (\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2),$$

dont les dérivées donnent les relations de LAMÉ entre déformations et contraintes :

$$(xx) = \lambda (s_x + s_y + s_z) + 2 \mu s_x = \lambda \theta + 2 \mu s_x,$$

$$(yy) = \lambda (s_x + s_y + s_z) + 2 \mu s_y = \lambda \theta + 2 \mu s_y,$$

$$(zz) = \lambda (s_x + s_y + s_z) + 2 \mu s_z = \lambda \theta + 2 \mu s_z,$$

et :

$$(yz) = \mu \sigma_{xy},$$

$$(zx) = \mu \sigma_{zx},$$

$$(xy) = \mu \sigma_{xy}.$$

Les coefficients λ et μ , constantes de LAMÉ, sont alors des constantes physiques liées au module d'YOUNG.

Ces relations permettent en particulier d'écrire les équations de l'équilibre élastique sous une autre forme, en fonction des déplacements :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} (\lambda + \mu) + \mu \Delta u + \rho X_0 = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} (\lambda + \mu) + \mu \Delta v + \rho Y_0 = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} (\lambda + \mu) + \mu \Delta w + \rho Z_0 = 0,$$

$$\Delta \theta = 0.$$

Étant donné un système de forces appliqué à un solide, et supposé connu, la connaissance de l'état de contraintes ou de déformations résulte de la résolution du système d'équations définissant l'équilibre élastique.

Cette résolution est mathématiquement rarement possible en raison de sa forme complète difficilement abordable. D'autre part, la connaissance de la répartition des forces appliquées se réduit, plus fréquemment, à une approximation assez grossière, sauf précautions expérimentales exceptionnelles :

- dimension des points d'application;
- dépassement de la limite d'élasticité, d'où plasticité dans la zone entourant ces points;
- difficulté d'appliquer des efforts purs sans liaison dimensionnelle ⁽¹⁾.

2.1.1.4 SOLUTIONS.

L'accès théorique à ces solutions n'a donc pu se faire que pour des cas simplifiés. Parmi ceux-ci, le plus important est celui de l'élasticité plane où les tensions sont toutes parallèles à un plan.

C'est, en particulier, le cas des solides auxquels sont appliquées des forces situées dans un plan :

- solides assimilables à des plaques minces;
- prismes ou cylindres allongés soumis à des forces perpendiculaires aux génératrices et constantes sur toute la longueur.

Dans ce cas :

- la contrainte normale (zz) sur des éléments parallèles au plan de déformation est nulle;
- trois des éléments de la déformation sont nuls :

$$(zx) = (xz) = (yz) = 0.$$

(1) Citons, par exemple, dans les flexions circulaires de poutres : l'application des couples de flexion se fait au moyen d'appuis, évidemment rigides, qui modifient la déformation par l'intermédiaire des coefficients de frottement.

Les équations de l'équilibre élastique deviennent alors :

$$\frac{\partial (xx)}{\partial x} + \frac{\partial (yx)}{\partial y} + \rho X_0 = 0,$$

$$\frac{\partial (yx)}{\partial x} + \frac{\partial (yy)}{\partial y} + \rho Y_0 = 0,$$

dont les solutions sont connues pour un grand nombre de cas simples et figurent dans tous les traités d'élasticité;

— flexion des poutres :

— encastrée, chargée à l'extrémité;

— sur appuis, charge uniforme;

— pression hydrostatique sur un mur rectangulaire;

— flexion simple de barre courbe;

— plaque rectangulaire, circulaire ou carrée, percée d'un trou circulaire au centre;

— disque circulaire appuyé,

etc.

Outre ces cas, devenus classiques, les méthodes purement mathématiques se heurtent à des difficultés presque insurmontables et doivent s'associer soit à des méthodes purement expérimentales (techniques de mesures, ou méthodes analogiques), soit à des techniques de calcul automatique permettant éventuellement d'accéder aux réponses sans connaître des expressions analytiques des solutions.

Nous nous abstiendrons de passer, même brièvement, en revue les extensomètres à jauges, les vernis craquelants, les analogies par cuve rhéoelectrique, par membrane ou par réseaux, les analyses par rayons X, etc. Ces techniques font l'objet d'importantes études et sortent du cadre de ce travail.

Nous aborderons donc directement les mesures de contraintes par photoélasticimétrie.

2.1.2 Photoélasticité plane.

2.1.2.1 BASES DE LA PHOTOÉLASTICITÉ.

La photoélasticité est une méthode basée sur les modifications de propagation des ondes lumineuses dans un solide soumis à des forces. Elle utilise des relations de liaison entre les paramètres de l'élasticité (contraintes) et les paramètres optiques : variation de longueur d'onde, indice de réfraction.

L'expérience a montré qu'une substance optiquement isotrope devient anisotrope après création d'un champ de contraintes; elle acquiert alors des propriétés optiques des cristaux (biréfringence accidentelle par déformation).

Supposons qu'une lame mince, d'épaisseur e , soumise à un effort uniforme dans son plan, est traversée perpendiculairement par un rayon lumineux r (fig. 1).

Ce rayon est décomposé en deux rayons :

— un rayon ordinaire polarisé parallèlement à l'effort exercé, correspondant à d'indice n_0 ;

— un rayon extraordinaire polarisé perpendiculairement au rayon ordinaire, et l'indice n_e .

La différence de marche entre les deux rayons, à la sortie de la lame, s'exprime par :

$$\delta = (n_e - n_0) e.$$

Elle est liée, d'autre part, aux contraintes principales p et q par la relation :

$$\delta = Ce (p - q),$$

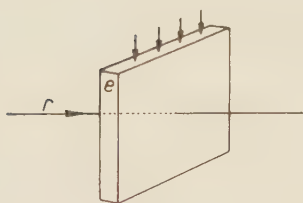


Fig. 1

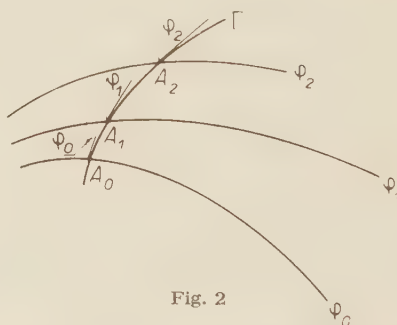


Fig. 2

où C , constante de BREWSTER, est un coefficient constant caractéristique du matériau et de la longueur d'onde λ (dimension $\frac{L^2}{M.L.T.^{-2}} = \frac{cm^2}{dyne}$).

Les liaisons entre propriétés optiques et élastiques sont résumées par les théorèmes suivants :

— les ellipsoïdes des contraintes et des indices en un point ont mêmes axes principaux;

— si l'on considère les ellipses sections de ces ellipsoïdes par un plan d'onde, les directions des indices principaux coïncident avec les contraintes principales;

— la différence des indices des deux vibrations est proportionnelle à la différence des contraintes principales dans le plan d'onde.

Les mesures effectuées consisteront donc en relevés :

a) du lieu des points où la différence de marche correspond à une différence de phase nulle : la lumière émergente a même direction de polarisation que le rayon incident (lignes d'extinction) :

$$p - q = \frac{K \lambda}{C e}, \quad K = 1, 2 \dots n.$$

Ce sont les isochromes;

b) du lieu des points où les contraintes principales ont une direction constante : ce sont les isoclines, permettant le tracé des isostatiques (*fig. 2*). Rappelons que la méthode usuelle consiste graphiquement à confondre l'arc $A_0 A_1$ avec la sécante $A_0 A_1$, donc à tracer à partir de A_0 une droite faisant un angle $\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}$ avec la direction de référence et à appeler A_1 le point d'intersection de cette droite avec l'isocline de paramètre φ_1 . Puis, de proche en proche, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, etc.

Remarquons qu'il est important de noter la direction origine de polarisation, ainsi que le sens de rotation des nicols.

La présence de points d'intersection des isoclines donne immédiatement les points singuliers pour lesquels l'ellipse des contraintes dans le plan est un cercle et où $p = -q$.

Il est d'ailleurs évident que les mesures relatives à un feuillet d'épaisseur e ne donnent que des valeurs moyennes de chacun des paramètres. On admet qu'à condition de choisir un feuillet suffisamment mince, la valeur moyenne diffère peu des valeurs locales, ou du moins qu'on est ramené à un cas de problème plan.

L'utilisation de ces méthodes photoélastiques qui s'était longtemps heurtée à la difficulté de trouver des matériaux qui fussent à la fois élastiques, transparents, photoélastiques, faciles à usiner et relativement peu coûteux, s'est trouvée particulièrement favorisée par l'étonnant développement des nouvelles résines synthétiques.

La différence entre les deux méthodes les plus fréquemment utilisées réside uniquement dans les conditions d'examen : dans la méthode classique du feuillet, on observe le modèle sous charge; dans la technique du figeage, on examine après décharge une pièce qui a conservé la répartition des contraintes sous charge.

2.1.2.2 LE FIGEAGE.

Si les premières observations, faites en 1850 par MAXWELL, semblent faire de cette technique une contemporaine du grand mouvement scientifique du XIX^e siècle, il fallut néanmoins attendre les expériences de SOLAKIAN en 1935, avec la Marblette, puis de COKER en 1936, sur l'usinage des modèles figés, enfin les explications du phénomène par KUSKE et HETENYI.

Le procédé expérimental consiste à chauffer le modèle jusqu'à une température de l'ordre de 100° à 115-127° (bakélite BT 61 893) en s'assurant d'une distribution uniforme de température, à le charger, à le refroidir ensuite lentement sous charge, enfin à le décharger. Le modèle gardant la répartition de contraintes de la charge peut être alors usiné et découpé en plaques minces pour être observé au banc de photoélasticimétrie. Le choix du processus opératoire (température critique, temps et vitesse de refroidissement, choix du matériau...) résulte de travaux longs et délicats.

La *figure 3* représente l'évolution des déformations d'une pièce en flexion à différentes températures. Le modèle est usiné en bakélite BT 61 893 [64].

Le même diagramme, avec une échelle des temps différente, devient celui représenté *figure 4*.

L'explication ⁽¹⁾ du phénomène du figeage fait appel à la structure des résines thermo-durcissables qui possèdent un réseau primaire fort (phase polymérisée) et, simultanément, une phase fusible et soluble (structure en chaîne).

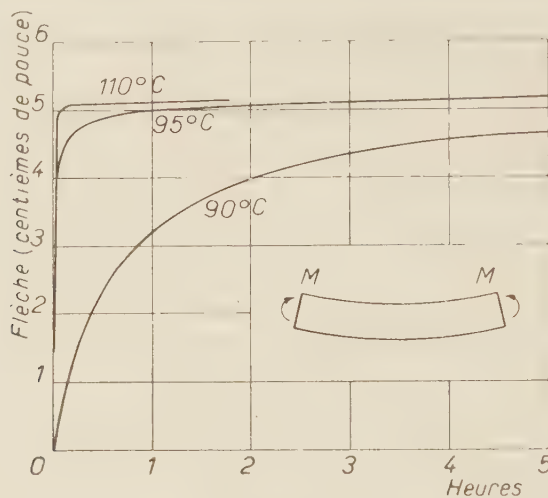


Fig. 3

La connaissance de cette structure permet de donner au figeage l'explication suivante :

— lors de l'élévation de température, la phase secondaire soluble atteint une viscosité négligeable, de sorte qu'au moment de la charge le réseau primaire

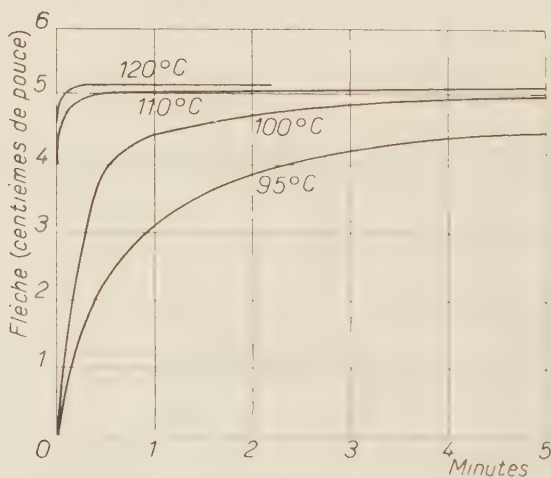


Fig. 4

polymérisé supporte seul la répartition des charges. Si l'on refroidit ensuite lentement le modèle sous charge la viscosité de la phase secondaire diminue, permettant à cette dernière de maintenir — ou de figer — le réseau primaire lorsque la charge est enlevée.

(1) Extrait de *The Fixation method*, réf. [64], p. 935.

Les contraintes internes du réseau sont compensées faiblement par une légère contrainte dans la phase secondaire (*fig. 5*).

Du point de vue photoélastique le fait important est qu'un tel équilibre de contraintes en chaque point produit une biréfringence qui est proportionnelle à la biréfringence sous charge à la température ambiante. Le retard optique dû à la phase primaire est sensiblement égal au retard à la température à laquelle le modèle a été figé. Chacun des éléments équilibrés ayant des dimensions très faibles, il est possible d'usiner le modèle, à condition d'éviter soigneusement tout dégagement de chaleur important.

Le modèle peut alors être examiné par tranches successives.

Intérêt du figeage.

Si la technique opératoire demande une mise au point soignée et délicate, les avantages résident essentiellement dans la possibilité d'usiner et d'étudier le modèle sans dispositif de charge. Par contre, les déformations, correspondant à l'observation

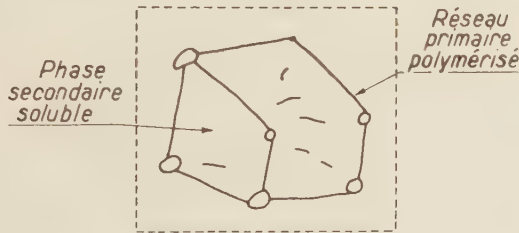


Fig. 5

d'un retard optique suffisant, sont très importantes, et ne répondent plus avec précision aux caractéristiques d'utilisation de la pièce réelle.

Le domaine d'application se limite évidemment aux cas de charges statiques.

Les propriétés caractéristiques du figeage définissent l'étendue et la validité de son domaine d'application. Il semble aussi qu'elles définissent par antithèse les conditions d'application de la seconde méthode que nous allons examiner.

2.1.2.3 MÉTHODE DE FAVRE-MESNAGER, OU DU FEUILLET.

Cette méthode, aujourd'hui classique, consiste à observer, sous charge, un modèle transparent d'un matériau photoélastique (*fig. 6*). Les difficultés d'usinage et de prix de revient des modèles en verre, xylonite, rhodoid... ont été réduites par l'apparition des plexiglas qui sont faciles à usiner, coller... et présentent même une grande variété de constantes photoélastiques.

La structure du modèle, constitué entièrement par le matériau photoélastique, diffère selon le problème posé :

— s'il s'agit d'un problème plan proprement dit, le modèle entier est réalisé en matériaux photoélastiques;

— s'il s'agit d'un problème dans lequel une section déterminée se trouve dans des conditions d'élasticité plane (plan de symétrie, par exemple), on insère dans le modèle réalisé en matériau non photoélastique une lame mince photoélastique à l'endroit de la section à observer (feuillet).

Le rayon incident ne subit ainsi de retard qu'à la traversée de la lame.

De nombreuses études de plaques fléchies ont été faites en utilisant cette technique.

Il est indispensable de signaler qu'il n'existe pas encore de matériau dont la constante photoélastique soit rigoureusement nulle, ce qui entraîne des servitudes quant aux épaisseurs relatives des deux matériaux qui, outre, doivent posséder mêmes modules d'élasticité longitudinale et transversale.

Le procédé expérimental consiste à relever les réseaux d'isoclines et d'isochromes. Il est alors possible de déterminer les contraintes principales p et q , soit à l'aide d'une mesure complémentaire de variation d'épaisseur (méthode de MESNAGER), soit en mesurant le retard optique entre le rayon incident et les rayons émergents

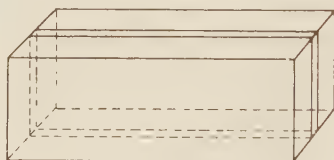


Fig. 6

(méthode de FAVRE), soit enfin, au moyen d'une méthode d'intégration le long des isostatiques, basée sur les équations de MAXWELL :

$$\frac{\partial p}{\partial s_1} + \frac{p - q}{\rho_2} = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial s_2} + \frac{q - p}{\rho_1} = 0,$$

dans lesquelles :

— ds_1 et ds_2 sont les arcs élémentaires des deux isostatiques correspondant aux contraintes principales p et q ;

— ρ_1 et ρ_2 les rayons de courbure de ces mêmes isostatiques.

On intègre soit en transformant les intégrales :

$$p = p_0 + \int \frac{q - p}{\rho_2} ds_1,$$

$$q = q_0 + \int \frac{p - q}{\rho_1} ds_2,$$

en sommes, soit en planimétrant le tracé.

Ce procédé expérimental, d'ailleurs commun au figeage et à la méthode du Professeur FAVRE, nécessite des tracés soigneux et assez longs mais fournit des résultats avec une précision satisfaisante.

Intérêt de la méthode du feuillet photoélastique.

Les matériaux tels que le plexiglas, le verre, la xylonite, possèdent peu de réactivité et peuvent, non seulement faire l'objet d'un examen presque immédiat, mais être réutilisés ultérieurement dans des conditions de charge différentes. Remarquons par ailleurs que leur transparence est excellente, contrairement aux matériaux « figeables ».

Il ne nous appartient pas d'essayer de classer ces deux méthodes de figeage et de FAVRE-MESNAGER l'une par rapport à l'autre : bien au contraire, nous pensons qu'il s'agit là de solutions équivalentes et surtout complémentaires, du moins pour les problèmes plans. Nous verrons ultérieurement que leur évolution semble se poursuivre parallèlement en photoélasticité tridimensionnelle.

2.1.2.4 MÉTHODE DE LA LUMIÈRE DIFFUSE.

Bien différente apparaît la troisième méthode, ou méthode de la lumière diffuse, qui n'est utilisée en photoélasticité que depuis peu (1939) et est basée sur le principe de diffusion de la lumière par les milieux troubles.

Rappelons quelques résultats de la théorie élémentaire :

— lorsqu'un faisceau de lumière polarisée tombe sur les particules d'un milieu isotrope, celles-ci émettent une lumière dans une direction parallèle au vecteur électrique de la lumière incidente (perpendiculaire au plan de polarisation et contenu par le plan d'onde). L'intensité de la lumière ainsi émise par un « vibreur » dans une direction donnée est proportionnelle au carré de son amplitude apparente lorsqu'elle est observée dans la direction donnée (c'est-à-dire proportionnelle au carré de la composante normale à la direction de propagation de la lumière);

— si un faisceau de lumière initialement polarisée traverse un modèle plan sous contrainte, les particules qui vibraient dans la direction du vecteur électrique du rayon lumineux incident vibrent ensuite sous l'influence de chacune des deux composantes entre lesquelles la lumière se trouve décomposée. Seule est alors visible, dans l'observation suivant une direction donnée, la composante dont la vibration est perpendiculaire à la direction d'observation.

Lorsque l'observation est faite suivant la direction de vibration de l'une des composantes, c'est-à-dire suivant la direction de l'une des contraintes principales, la lumière diffuse ne résulte que de l'autre composante. Dans toute autre direction on observera des franges d'interférence dues à la composition des composantes des deux vibrations.

On accède ainsi directement à la direction des contraintes principales par disparition des franges d'interférences.

La valeur moyenne de la différence des contraintes entre deux franges consécutives satisfait aux équations :

$$K (n_1 - n_2) = p - q \quad \text{et} \quad p - q = C \frac{\Delta N}{\Delta S},$$

où :

- K représente une constante caractéristique de la substance;
- n_1 et n_2 les indices principaux situés dans la direction des contraintes principales;
- p et q les contraintes principales;
- ΔN l'accroissement du nombre de franges;
- ΔS l'espacement des franges;
- C une constante appelée coefficient optique de tension de la substance.

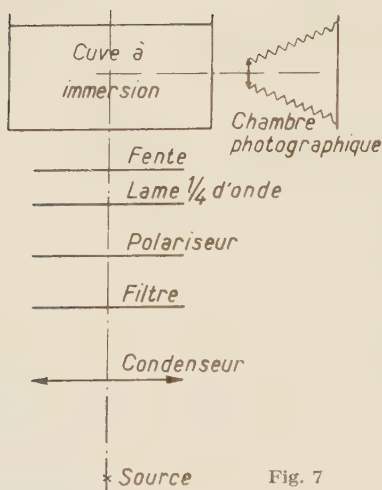


Fig. 7

Le dispositif expérimental est schématiquement représenté sur la *figure 7*. Il nécessite une cuve d'immersion pour limiter la réfraction sur les bords, une source lumineuse très puissante (lampe H 6 à arc de mercure : 1 000 W de la General Electric Co. ou Westinghouse Co., refroidie par eau).

Il semble que cette méthode présente par rapport au figeage l'avantage de ne pas détruire le modèle, l'inconvénient de nécessiter un appareillage assez coûteux. En outre, les causes d'erreurs paraissent nombreuses.

Néanmoins, les résultats publiés font apparaître une excellente concordance sur l'examen de modèles classiques, due sans doute à l'emploi des méthodes interférentielles. Celles-ci permettent, d'ailleurs, d'opérer sur des modèles chargés main-

tenus au-dessous de la limite élastique. Remarquons que cette technique très récente fait l'objet de nombreuses études, notamment aux États-Unis et en Allemagne, et que son développement est en pleine évolution.

Ce très rapide tour d'horizon des techniques photoélastiques nous conduit à considérer chacune des solutions proposées sans pouvoir donner à l'une d'elles une situation privilégiée : elles proposent, au moyen de techniques, plus ou moins proches, des solutions, par mesures optiques, aux mêmes problèmes, dans des conditions comparables à la fois en prix de revient, difficulté, précision.

Or, cela voudrait-il signifier que le problème posé est résolu, que la précision des mesures est satisfaisante ? Il n'est que d'observer le nombre des méthodes photoélastiques ou non, la multiplicité des publications paraissant chaque mois sur ce sujet, le crédit prêté encore à des formules empiriques relatives aux conditions de rupture des pièces, le facteur appelé avec discrétion « coefficient de sécurité » et appliqué aux dimensions des réalisations mécaniques (d'où, souvent, leur poids) pour savoir que le problème est loin d'être résolu.

2,2

SENS DE L'ÉVOLUTION

On peut, semble-t-il, distinguer actuellement deux voies différentes dans les études photoélastiques :

1^o recherches en profondeur sur les principes mêmes de la méthode photoélastique :

- linéarité de la loi biréfringence-efforts;
- réactivité;
- effet de bord;
- effet de temps;
- examens systématiques des paramètres technologiques, dans le figeage en particulier;

2^o mise au point de méthodes pour la résolution des problèmes tridimensionnels.

Enfin, plus ou moins directement, la photoélasticité contribue à l'évolution et à l'extension de la théorie de l'élasticité.

2,2.1 Extension des méthodes expérimentales vers les problèmes à trois dimensions.

2,2.1.1 MÉTHODES PAR FIGEAGE.

La méthode proposée par FROCHT [52] cherche à résoudre directement les équations de l'équilibre élastique en remplaçant les éléments différentiels par des différences finies, les intégrations par des sommations graphiques. Ces intégrations, à partir des limites du modèle interdisent, semble-t-il, tout autre procédé que le figeage.

Principe.

Considérons un modèle tridimensionnel sous charge et une ligne droite le traversant (*fig. 8*). En tout point de cette droite, supposée parallèle à l'axe OX, la première équation différentielle de l'équilibre s'écrit :

$$(2,2.1) \quad \frac{\partial (xx)}{\partial x} + \frac{\partial (yx)}{\partial y} + \frac{\partial (zx)}{\partial z} = 0$$

ou, en un point J déterminé :

$$(2,2.2) \quad (xx)_J = (xx)_A - \int_a^J \frac{\partial (yx)}{\partial y} dx - \int_a^J \frac{\partial (zx)}{\partial z} dx.$$

Chacune des dérivées partielles figurant dans cette équation peut être considérée comme la dérivée de (yx) le long d'une droite parallèle à l'axe des Y, et comme la dérivée de (zx) le long d'une droite parallèle à Oz. Ces dérivées, ou pentes, sont alors approximées en mesurant des contraintes de cisaillement et en effectuant des quotients de différences finies :

$$(2,2.3) \quad \left(\frac{\partial (yx)}{\partial y} \right)_J = \frac{(yx)_C - (yx)_D}{\Delta y} = \left(\frac{\Delta (yx)}{\Delta y} \right)_J$$

et :

$$(2,2,4) \quad \left(\frac{\partial (zx)}{\partial z} \right)_J = \frac{(zx)_E - (zx)_F}{\Delta z} = \left(\frac{\Delta (zx)}{\Delta z} \right)_J.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation (2,2,2), dans laquelle les intégrations sont remplacées par des sommations évaluées graphiquement, aboutissent à l'équation :

$$(2,2,5) \quad (xx)_J = (xx)_A - \sum_A^J \frac{\Delta (yx)}{\Delta y} \Delta x - \sum_A^J \frac{\Delta (zx)}{\Delta z} \Delta x.$$

Un découpage en tranches d'épaisseur égale dans les trois directions simplifie cette relation :

$$(2,2,6) \quad (xx)_J = (xx)_A - \sum_A^J \Delta (yx) - \sum_A^J \Delta (zx).$$

Il est important de faire très attention aux signes de (yx) et (zx) .

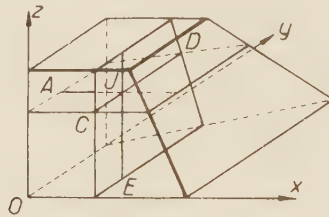


Fig. 8

Opérations à effectuer.

La réalisation pratique des intégrations nécessite la mesure des contraintes le long des lignes auxiliaires parallèles à Oy et Oz , c'est-à-dire le découpage selon des plans parallèles respectivement aux plans xOz et xOy . Il est alors utile d'effectuer ces mesures sur deux modèles identiques, chargés identiquement, découpés l'un en lames parallèles au plan xOz , l'autre en lames parallèles au plan xOy .

L'examen de chacune des lames en incidence normale donnera la différence entre les contraintes principales secondaires p et q en tout point de la lame, et le tracé des isoclines en donnera l'orientation.

La contrainte en un point de la lame s'exprime alors par :

$$(2,2,7) \quad (yx) = \frac{1}{2} (p - q) \sin \varphi,$$

où φ est le paramètre de l'isocline.

L'examen du modèle est effectué à partir du contour, par mesure de l'ordre de frange.

L'ensemble de ces mesures permet d'obtenir les six composantes normales et tangentielles de la contrainte au point J , et d'en déduire les contraintes principales.

D'après ФРОЧТ, l'application de cette méthode à une sphère comprimée aurait donné des résultats d'une précision inespérée. Par contre, il semble que la multiplicité des opérations à effectuer soit un obstacle sérieux dans le cas d'une utilisation systématique. Par ailleurs, cette résolution, par sa généralité même, possède un champ d'application très vaste.

La méthode exposée par JESSOP au Congrès de Bruxelles de 1954, et nommée « *Titling Stage Method* », due à VON FEDOROV, cherche à effectuer une simplification préalable du système général d'équations, en déterminant expérimentalement les directions des axes principaux en un point.

Elle est basée sur une propriété classique des isoclines : toute rotation du modèle autour d'un axe qui n'est pas axe principal produit un déplacement de l'isocline. Réciproquement, il est possible de déterminer les axes principaux en cherchant les axes de rotations ne déplaçant pas l'isocline au point considéré.

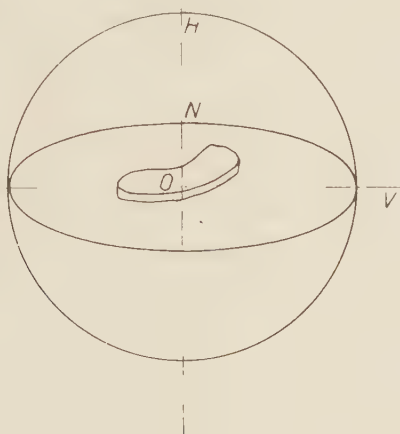


Fig. 9

L'intérêt de la solution proposée pour JESSOP ne consiste pas en l'application de la propriété citée, qui est connue, mais dans la mise au point d'une méthode de juxtaposition de rotations élémentaires conduisant aux axes principaux. C'est une *méthode de convergence expérimentale*, basée sur un ensemble d'opérations physiques constituant une séquence.

Cette méthode est mise au point sur des modèles figés, mais les observations, faites sur des lames minces, utilisent des valeurs locales et pourraient être appliquées à la technique du feuillet photoélastique.

Une lame du modèle figé est placée sur une plate-forme transparente possédant trois degrés de liberté angulaire ON, OV, OH autour d'un point O de son plan avec lequel on fait coïncider le point observé (*fig. 9*). Initialement, la lame est placée verticalement dans le plan OV, OH, et est tournée dans son propre plan autour de ON, jusqu'à ce qu'une isocline passe par O.

Les rotations autour de OH ou de OV *déplacent en général l'isocline*, sauf si l'un d'eux est un axe principal. Il faut donc, en général, entreprendre une série de mesures

qui tendent, par corrections successives, à amener OH en coïncidence avec un axe principal en O.

Les opérations sont les suivantes :

- effectuer une petite rotation positive $d\theta$ autour de OH, ce qui a pour effet de déplacer l'isocline;
- ramener l'isocline en O au moyen d'une petite rotation $d\varphi$ autour de ON;
- effectuer une seconde rotation autour de OH, mais d'un angle $-d\theta$;
- ramener l'isocline en O par une rotation autour de OV.

L'ensemble de ces opérations doit être répété jusqu'à ce que la rotation autour de OH ne déplace plus la frange. Une vérification de l'orientation de OH est entreprise au cours d'une seconde détermination dans laquelle les signes des rotations $d\theta$ et $d\varphi$ sont inversés. Elle aboutit à un axe en alignement avec OH.

La détermination du second axe principal est effectuée à partir d'une position initiale de la plaque à 90° de sa position antérieure dans son plan.

Les mesures de différences principales sont ensuite effectuées en faisant coïncider chacun des plans principaux ainsi obtenus avec le plan d'onde de la lumière incidente.

Pour la détermination de la grandeur des trois axes principaux, la mesure de deux des « différences principales » doit être associée à une mesure par intégration des gradients de contraintes, selon la méthode de FROCHT.

Les difficultés expérimentales semblent être dues aux possibilités de grande inclinaison des axes principaux par rapport au plan de la lame, mais il suffit de disposer de deux modèles semblables, découpés selon des plans orthogonaux l'un à l'autre, pour que ces difficultés soient résolues.

Par contre, il est important de signaler que cette méthode présente des avantages remarquables :

- simplification du système d'équations à résoudre;
- mise au point d'une convergence systématique vers les directions des axes principaux.

Nous ne possédons pas encore de renseignements sur la précision des résultats obtenus, mais cette méthode étant basée sur une utilisation des axes privilégiés, et non sur des hypothèses simplificatrices, ne peut que conduire à une augmentation de la précision des résultats.

2.2.1.2 MÉTHODE PAR LUMIÈRE DIFFUSE.

La généralisation de la technique de la lumière diffusée conduit à une méthode d'analyse des états tridimensionnels, par une étude de la variation de la biréfringence le long d'un rayon lumineux traversant le modèle.

Elle nécessite la réalisation d'une source de lumière polarisée susceptible d'être déplacée dans le modèle. Celui-ci est donc éclairé par tranches, à l'aide d'un pinceau lumineux plat. La lumière diffusée, examinée à 90° du pinceau lumineux, fait apparaître des franges d'interférences dues à la biréfringence de la substance comprise entre le

pinceau plat et le point d'émergence du rayon diffusé. Si le faisceau lumineux est polarisé rectilignement, le phénomène de diffusion joue le rôle d'analyseur et l'on repère directement les franges; dans le cas contraire, il est nécessaire de disposer un analyseur à la sortie du rayon diffusé.

La mesure de la biréfringence dans un état tridimensionnel se fait alors en plaçant initialement la source à la surface du modèle, et en l'éloignant ensuite à l'intérieur du modèle.

L'étude de l'évolution de la déformation des franges donne une mesure de la biréfringence : une frange apparaît chaque fois que le retard relatif est égal à un nombre entier de longueurs d'onde.

En un point déterminé le retard relatif le plus grand est le retard proportionnel à la différence entre le plus grand et le plus petit indice. Si l'on ne connaît pas la direction de l'indice moyen, R. WELLER [69], [70] et J. K. BUSSEY [69] proposent de faire passer un rayon lumineux par le point considéré suivant plusieurs directions jusqu'à ce que la variation de la déformation des franges soit maximum. La mesure de l'épaisseur (ou de la distance) produisant une variation d'une frange, donne alors la différence entre les deux indices extrêmes au point considéré. Ceci sous-entend évidemment que l'examen est fait le long de tous les rayons passant par le point.

A cette mesure de différence doit être associée une autre mesure, par exemple, une mesure de déformation. L'application de cette technique à une poutre rectangulaire en flexion a donné des résultats vérifiant les calculs théoriques avec une précision supérieure à 5 %, mais nous n'avons pas eu connaissance de publication de résultats relatifs à un problème tridimensionnel pur.

Cette méthode, qui effectue les mêmes mesures, et résout donc les mêmes équations que les méthodes citées précédemment, présente l'inconvénient de faire appel au phénomène très complexe de la diffusion de la lumière dans les milieux troubles, et se heurte à des difficultés techniques importantes (puissance des sources lumineuses). Par contre, elle permet d'opérer sur des modèles sous charge non détruits par les mesures.

Il est essentiel, en effet, de ne pas perdre de vue que toute application de charge se traduit par un état de contraintes en général tridimensionnel. Les méthodes d'approches du problème, utilisant soit un découpage effectif du modèle, soit une localisation d'éléments plans, remplacent l'effet optique des contraintes par une somme d'effets élémentaires calculés au travers de lames d'épaisseur faible. Cette approximation, d'ailleurs classique, n'introduit pas d'erreurs importantes et doit permettre, non seulement de résoudre expérimentalement le problème général de la répartition des contraintes tridimensionnelles, en charge statique, mais d'aborder ces mêmes problèmes dans les cas de charges dynamiques.

2.2.2 Extension de la théorie de l'élasticité.

Sans vouloir aborder ici un exposé des recherches entreprises pour compléter la théorie de l'élasticité, nous insisterons toutefois sur le fait que la théorie classique, pour complexe qu'elle soit, ne constitue qu'une première approche de la réponse en contraintes d'un solide aux sollicitations extérieures. De nombreux travaux ont déjà

tenté d'étudier, par l'adjonction de nouvelles hypothèses, la réponse des solides aux sollicitations variables dans le temps, et en particulier aux sollicitations alternées.

Les hypothèses de non-linéarité des efforts et des déformations, la notion de plasticité, l'introduction d'un terme supplémentaire dans l'évaluation des déplacements, ont permis d'expliquer certains phénomènes [16].

Il est prématuré, sans doute, d'appliquer les méthodes de photoélasticité aux problèmes dynamiques; mais il est dès maintenant indispensable de préciser en dynamique la validité de la loi linéaire liant la biréfringence observée aux contraintes.

Par ailleurs, il serait intéressant de poursuivre des études systématiques de pièces soumises à des déformations imposées, et non à des efforts imposés; ce point de vue joindrait l'intérêt de se rapprocher des conditions réelles de sollicitation des pièces, à l'intérêt, expérimental, d'aboutir à des réalisations plus simples.

3 MÉTHODE DIRECTE EN PHOTOÉLASTICITÉ A TROIS DIMENSIONS

Le problème général, et les difficultés, auxquelles se heurtent les techniques de photoélasticité à trois dimensions, présentent le caractère de complexité de tous les problèmes tridimensionnels. La variété des formes des modèles, donc des conditions, interdit, en pratique, l'usage des hypothèses simplificatrices permettant, parfois, de linéariser certaines relations ou d'obtenir une approximation satisfaisante des solutions. Il est possible d'imaginer que l'essor des machines à calculer, dont la puissance et la rapidité sont actuellement utilisables par les laboratoires ou les industries pour de nombreuses questions, permettra de résoudre directement les équations de l'équilibre élastique, écrites pour les problèmes particuliers.

Cependant, nous pensons que ce mode de résolution nécessitant des équipements très importants, ne doit pas être envisagé pour le seul problème de la détermination des contraintes — d'autant plus que des techniques expérimentales tendent à donner des résultats très satisfaisants.

Nous avons donc cherché à mettre au point une méthode ayant pour but la détermination directe, et simple, dans la mesure du possible, des caractéristiques des contraintes en un point, dans un état tridimensionnel.

3,1 PRINCIPE DE LA MÉTHODE

La méthode exposée se propose de déterminer par mesures optiques et calculs simples la position et la grandeur des trois contraintes principales en un point préalablement choisi. L'examen portera sur un feuillet plan photoélastique passant par ce point et figurant une section d'épaisseur petite mais non nulle de l'état tridimensionnel de contraintes. La possibilité d'une détermination semblable en chaque point du feuillet guidera évidemment l'expérimentateur dans le choix du plan de section.

Technologiquement, pour disposer du feuillet photoélastique on adoptera soit la méthode du figeage (modèle découpé), soit la méthode du professeur FAVRE du feuillet photoélastique incorporé dans un modèle non photoélastique.

Dans un modèle figé à trois dimensions nous estimons difficile de suivre un point lorsque les déformations sont grandes.

C'est pourquoi nous avons utilisé jusqu'à présent, dans notre méthode, la technique du feuillet photoélastique.

Nous considérons donc un modèle dans lequel est incorporée une lame mince plane photoélastique, le modèle ayant une orientation quelconque par rapport au rayon lumineux incident (*fig. 10*).

Le paramètre variant au cours des observations sera l'incidence du rayon lumineux par rapport à la lame, entraînant une variation de l'épaisseur traversée, dont il faudra tenir compte lors des calculs.

Les étapes de la méthode sont les suivantes :

- a) détermination, par des moyens optiques simples, des directions des axes optiques;
- b) détermination géométrique simple des directions principales;

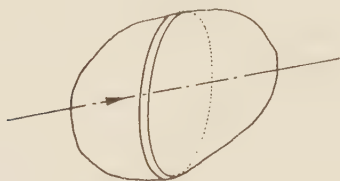


Fig. 10

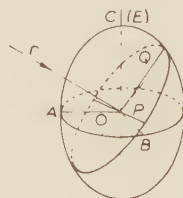


Fig. 11

- c) détermination, par mesure photoélastique, puis par calcul, de la grandeur des contraintes principales.

Dans cette méthode nous utilisons l'ellipsoïde des indices, ou ellipsoïde de FRESNEL, de préférence à l'ellipsoïde des contraintes.

Rappelons brièvement les notations utilisées.

La propagation de la lumière à travers un milieu anisotrope, cristal uniaxe ou biaxe, dépend des axes principaux (*fig. 11*) :

$$OA = n_1,$$

$$OB = n_2,$$

$$OC = n_3,$$

n_1 , n_2 et n_3 étant les indices principaux de l'ellipsoïde de FRESNEL, et de la direction du rayon lumineux r . Le plan d'onde R, normal à r , coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse (E) de demi-axes P et Q. La vibration incidente est décomposée en deux vibrations ayant pour indices ces axes P et Q, donc se propageant avec des vitesses différentes, dans le cas général.

La biréfringence, mesurée après traversée de la plaque, est proportionnelle à la différence entre les axes de l'ellipse (E), section de l'ellipsoïde des indices par le plan

d'onde R. D'autre part, la biréfringence est aussi une fonction linéaire de la différence des contraintes principales dans le plan R.:

$$(P - Q) = C (n_1 - n_2),$$

C étant la constante photoélastique du matériau.

Les résultats obtenus par mesures de différences d'indices seront donc immédiatement traduisibles en différences de contraintes.

Les ellipsoïdes des indices et des contraintes ayant mêmes axes principaux, les sections de ces ellipsoïdes par un même plan ayant mêmes directions principales, la connaissance de l'un des ellipsoïdes entraîne la connaissance de l'autre.

3,1.1 Recherche des axes optiques.

L'ellipse (E), section de l'ellipsoïde des indices par le plan d'onde R, a pour axes principaux P et Q. Il n'existe que deux orientations du plan R pour lesquelles l'ellipse (E) est un cercle. Ces deux orientations sont d'ailleurs symétriques par rapport au plan principal AOB contenant le plus petit axe OA et l'axe moyen OB de l'ellipsoïde.

Les directions correspondantes du rayon incident r , situées dans le plan principal AOC, et symétriques par rapport aux axes OA et OC, sont les axes optiques du cristal.

Le cristal est isotrope pour ces deux directions.

Au banc photoélastique, les directions des axes optiques correspondent aux deux orientations du modèle pour lesquelles on n'observe aucune biréfringence et où le point O considéré apparaît comme un point singulier. Nous nommerons désormais « points singuliers apparents » les points pour lesquels, sous une incidence déterminée, on n'observe aucune biréfringence.

Des considérations relatives aux propriétés classiques des ellipsoïdes nous permettent de faire les remarques suivantes :

- en un point donné quelconque du modèle, il existe deux orientations, et deux seulement, pour lesquelles le point est un « point singulier apparent »;
- ces deux orientations définissent les axes optiques au point considéré;
- si un point est « point singulier apparent » pour plus de deux directions, il l'est pour une infinité de directions et est un point singulier réel, pour lequel les ellipsoïdes des indices et des contraintes sont des sphères.

Du point de vue expérimental, la recherche, par rotation du modèle, des directions pour lesquelles on n'observe aucune biréfringence au point donné, permet de déterminer l'orientation des axes optiques.

3,1.2 Détermination des directions principales.

Le repérage des axes optiques permet la détermination immédiate des directions principales : en effet, les deux axes étant situés dans le plan AOC contenant le plus petit axe OA et le plus grand axe OC définissent le plan principal AOC, ainsi que la direction principale OB orthogonale en O au plan AOC.

D'autre part, les axes optiques sont symétriques par rapport aux axes principaux OA et OC : les directions des axes principaux OA et OC sont donc données par les bissectrices de l'angle des directions des axes optiques (*fig. 12*).

Nous connaissons donc, sans aucune autre mesure :

- la direction de l'axe principal moyen OB;
- les directions des autres axes principaux OA et OC, sans toutefois pouvoir préciser la direction respective de chacun d'eux.

3,1.3 Détermination des axes principaux.

Il est alors nécessaire de joindre aux résultats qualitatifs obtenus des mesures de biréfringence permettant de déterminer la grandeur des axes principaux.

Nous établirons tout d'abord une relation générale liant la biréfringence ($\mathcal{B}$) mesurée aux axes principaux de l'ellipsoïde des indices et à la direction du rayon incident.

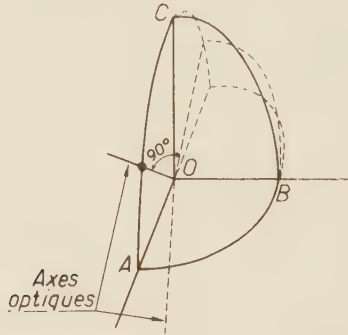


Fig. 12

Cette relation se présente sous une forme assez complexe :

$$(\mathcal{B}) = f(a, b, c, r)$$

et la détermination de a, b, c résulte de la résolution du système :

$$(\mathcal{B}_1) = f(a, b, c, r_1),$$

$$(\mathcal{B}_2) = f(a, b, c, r_2),$$

$$(\mathcal{B}_3) = f(a, b, c, r_3),$$

la biréfringence étant mesurée pour trois incidences du rayon lumineux.

La résolution présente numériquement des difficultés que nous avons cherché à minimiser en utilisant une donnée numérique constituant déjà un paramètre de l'ellipsoïde : l'angle des deux axes optiques. Nous verrons que la résolution se ramène alors soit à l'*intersection graphique* d'un réseau de courbes dont les valeurs ont été tabulées, avec une droite dont la pente résulte d'une mesure de biréfringence, soit à la *résolution d'une équation* du troisième degré possédant une racine réelle, résolution pour laquelle nous proposons une méthode.

3,2

ASPECT THÉORIQUE

3,2.1 Relation générale liant la biréfringence mesurée aux axes principaux de l'ellipsoïde des indices et à la direction du rayon incident.

Considérons l'ellipsoïde des indices, rapporté à ses axes $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ et d'équation :

$$(3,1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

coupé par le plan d'onde R (fig. 13), passant par l'origine, et d'équation :

$$(3,2) \quad ux + vy + wz = 0,$$

u, v, w étant les cosinus directeurs du rayon incident r , normal au plan d'onde.

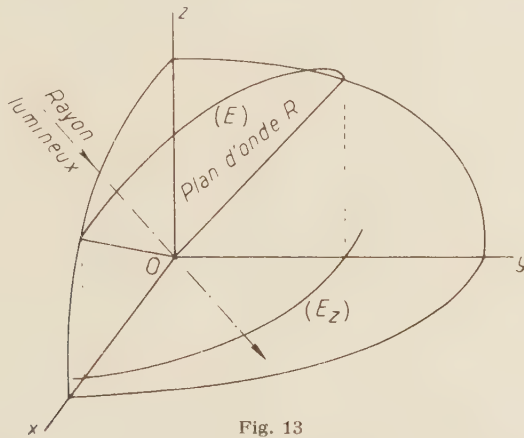


Fig. 13

La section est une ellipse (E) , se projetant sur xOy suivant l'ellipse (E_z) dont l'équation s'obtient en éliminant z entre les relations (3,1) et (3,2) :

$$(3,3) \quad x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{u^2}{c^2 w^2} \right) + y^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{v^2}{c^2 w^2} \right) + \frac{2 uvxy}{c^2 w^2} = 1.$$

La mesure de la biréfringence permet de connaître la valeur absolue de la différence $P - Q$ des axes de l'ellipse (E) , mais ne donne aucun renseignement sur leur orientation.

L'ellipse (E_z) étant d'un accès plus aisé que (E) nous déterminerons la valeur absolue de $P - Q$ en utilisant des propriétés géométriques et les relations liant les ellipses (E) et (E_z) .

Or, nous possédons déjà une information sur le produit $P \cdot Q$ à l'aide de la surface S de (E) . En effet S_z , surface de (E_z) , est liée à S par :

$$(3,4) \quad S_z = S \cdot w,$$

où w est le cosinus directeur de l'angle (Oz, r) des normales aux plans xOy et R .

La surface S_z est calculable au moyen de l'équation (3,3). Les coefficients de l'équation de l'ellipse (E_z) :

$$(3,5) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0,$$

ramenée à ses axes, sont donnés par les racines de :

$$(3,6) \quad s^2 - (A + C)s + AC - B^2 = 0.$$

Or, ces coefficients sont respectivement égaux à $\frac{1}{P_z^2}$ et $\frac{1}{Q_z^2}$, P_z et Q_z étant les axes de (E_z).

Le produit $\frac{1}{P_z^2} \cdot \frac{1}{Q_z^2}$ est le produit des racines du trinôme, c'est-à-dire le terme indépendant de s :

$$\frac{1}{P_z^2} \cdot \frac{1}{Q_z^2} = AC - B^2 = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{u^2}{c^2 w^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{v^2}{c^2 w^2} \right) - \frac{u^2 v^2}{c^2 w^4},$$

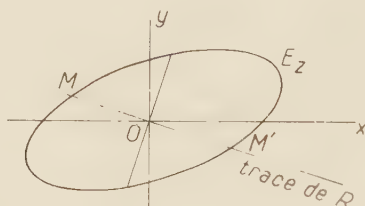


Fig. 14

d'où :

$$S_z = \pi \cdot P_z \cdot Q_z = \frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{u^2}{c^2 w^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} + \frac{v^2}{c^2 w^2} \right) - \frac{u^2 v^2}{c^2 w^4}}}.$$

D'autre part :

$$S_z = \pi \cdot P_z \cdot Q_z = w \cdot S = w \cdot \pi \cdot P \cdot Q$$

et :

$$(3,7) \quad P \cdot Q = abc (a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2)^{-1/2}.$$

La *seconde relation* entre P et Q sera obtenue en utilisant les propriétés des diamètres orthogonaux de l'ellipse : la somme des carrés des inverses de deux diamètres orthogonaux ρ_1 et ρ_2 est constante et égale à la somme des carrés des inverses des axes de l'ellipse .

$$(3,8) \quad \frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{Q^2} = \frac{P^2 + Q^2}{P^2 Q^2}.$$

Les diamètres orthogonaux choisis sont des diamètres particuliers tels que l'un d'eux, MM' , trace de R dans le plan xOy (fig. 14), est commun aux deux ellipses (E) et (E_z).

Calcul de $\rho_1 = \overline{OM}$.

La trace D de R, d'équation :

$$(3,9) \quad ux + vy = 0,$$

coupe (E_z) en M et M', de coordonnées :

$$(3,10) \quad x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{u^2}{c^2 w^2} \right) + \frac{u^2 x^2}{v^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{v^2}{c^2 w^2} \right) - \frac{2 u v x}{c^2 w^2} \cdot \frac{u x}{v} = 1,$$

$$x^2 = \frac{a^2 b^2 v^2}{a^2 u^2 + b^2 v^2};$$

de même y :

$$(3,11) \quad y^2 = \frac{a^2 b^2 u^2}{a^2 u^2 + b^2 v^2}$$

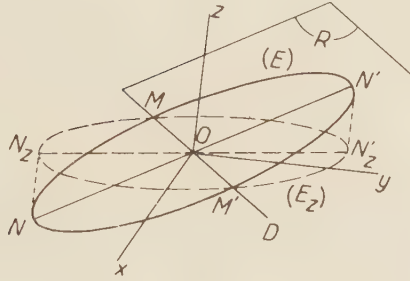


Fig. 15

d'où, en prenant les demi-diamètres :

$$(3,12) \quad \frac{\rho_1^2}{4} = \overline{OM^2} = \frac{a^2 b^2 (u^2 + v^2)}{a^2 u^2 + b^2 v^2}.$$

Calcul de $\rho_2 = \overline{ON}$.

La droite $N_z N'_z$, orthogonale à D dans le plan xOy (fig. 15), a pour équation :

$$vx - uy = 0$$

et coupe l'ellipse (E) en deux points N_z, N'_z symétriques par rapport à O, de coordonnées :

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{u^2}{c^2 w^2} \right) + \frac{v^2 x^2}{w^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{v^2}{c^2 w^2} \right) + \frac{2 u v x}{w^2 c^2} \cdot \frac{v x}{u} = 1,$$

soit :

$$(3,13) \quad x^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 u^2 w^2}{(b^2 u^2 + a^2 v^2) c^2 w^2 + (u^2 + v^2)^2 a^2 b^2}$$

et :

$$(3,14) \quad y^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 v^2 w^2}{(b^2 u^2 + a^2 v^2) c^2 w^2 + (u^2 + v^2)^2 a^2 b^2}.$$

où :

u, v, w sont les cosinus directeurs du rayon lumineux incident r ($u^2 + v^2 + w^2 = 1$);

a, b, c les axes de l'ellipsoïde des indices [ou des contraintes, bien que dans ce cas il soit nécessaire de tenir compte des signes des contraintes (*fig. 16*)].

Pour plus de commodité dans les constructions graphiques, exprimons cette relation en fonction d'axes sans dimensions $\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = \frac{b}{c}$ et 1.

D'où $\alpha \leq \beta \leq 1$:

$$(3,17) \quad \left(\frac{P - Q}{c} \right)^2 = \frac{\alpha^2 (u^2 + v^2 w^2) + \beta^2 (v^2 + u^2 w^2) + (u^2 + v^2)^2 \alpha^2 \beta^2}{(\alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 + w^2) (u^2 + v^2)} - \frac{2 \alpha \beta}{\sqrt{\alpha^2 u^2 + \beta^2 v^2 + w^2}}.$$

Cette relation générale lie la biréfringence $(P - Q)$ mesurée aux paramètres α, β, c de l'ellipsoïde et à l'orientation u, v, w du rayon incident :

$$(P - Q)^2 = f(\alpha, \beta, c, r).$$

Dans cette relation $P - Q$ est mesurée, et l'orientation du rayon incident est connue. Les seules inconnues sont les axes principaux $a = \alpha c$, $b = \beta c$, c de l'ellipsoïde. Il suffit donc de trois mesures pour obtenir un système d'équations dont la résolution conduirait aux axes principaux.

Il est possible d'aborder différemment cette résolution en utilisant la mesure de l'angle des axes optiques.

Relation liant les axes optiques aux axes principaux.

Lorsque le rayon lumineux coïncide avec l'un des axes optiques, la biréfringence mesurée est nulle :

$$P - Q = 0.$$

D'autre part, l'axe optique est situé dans le plan principal AOC, et orthogonal à l'axe Oy (*fig. 17*) :

$$v = \cos(r_1, Oy) = 0.$$

La relation générale (3,17) devient alors :

$$\alpha^2 + \beta^2 w^2 + u^2 \alpha^2 \beta^2 - 2 \alpha \beta \sqrt{\alpha^2 u^2 + w^2} = 0.$$

En élevant au carré, et tenant compte de :

$$u^2 + w^2 = 1,$$

on retrouve l'expression :

$$(3,18) \quad u^2 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2 (1 - \alpha^2)},$$

qui s'obtient directement en cherchant, dans le plan AOC, l'orientation $\vec{n}$ pour laquelle le rayon vecteur prend la valeur β .

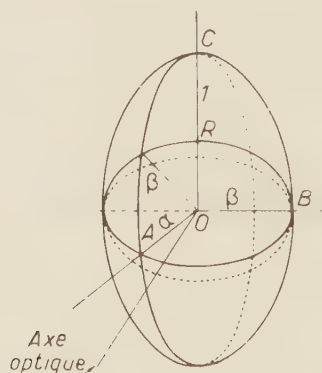


Fig. 17

La grandeur accessible expérimentalement étant u , ou plus exactement $\Omega = \arccos u$, il peut être intéressant d'expliciter cette relation en fonction de l'une des inconnues :

$$(3,19) \quad \beta = \alpha [1 - u^2 (1 - \alpha^2)]^{-1/2};$$

la détermination choisie est positive puisque α et β sont des longueurs.

Remarquons que l'inconnue c a disparu : en effet, c est un paramètre d'homothétie (et non de forme) de l'ellipsoïde, indépendant de l'angle des axes optiques.

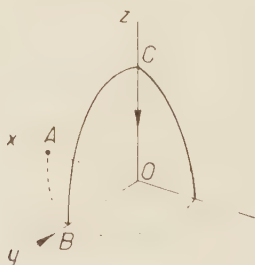


Fig. 18

3,2.2 Cas particulier des plans principaux.

Lorsque le rayon lumineux coïncide avec les axes principaux, la relation générale se simplifie : la mesure de la biréfringence, pour les deux directions particulières BO et CO (fig. 18), donne directement :

$$(3,20) \quad (P - Q) = h = b - a \quad \text{suivant} \quad \text{BO};$$

$$(3,21) \quad (P - Q) = k = c - a \quad \text{suivant} \quad \text{CO},$$

relations obtenues par ailleurs en prenant :

$$u = 0 = w, v = 1 \quad \text{pour le rayon} \quad r_2,$$

$$u = 0 = v, w = 1 \quad \text{pour le rayon} \quad r_3,$$

dans la relation générale (3,17).

L'élimination de c entre les relations (3,20) et (3,21) permet d'exprimer β linéairement en fonction de α :

$$(3,22) \quad \frac{b-a}{c-a} = \frac{c(\beta-\alpha)}{c(1-\alpha)} = \frac{h}{k} = \lambda,$$

d'où :

$$\beta = \lambda + (1 - \lambda) \alpha.$$

3,2.3 Résolution.

La connaissance de β et α ne dépend plus alors que de la résolution du système d'équations :

$$(3,23) \quad \begin{cases} \beta^2 u^2 (1 - \alpha^2) + \alpha^2 - \beta^2 = 0, \\ \beta = \lambda + (1 - \lambda) \alpha. \end{cases}$$

Résolution graphique.

La première de ces équations fait intervenir le demi-angle $\Omega = \arccos u$ des axes optiques. Le tracé des courbes :

$$\beta = \alpha [1 - u^2 (1 - \alpha^2)]^{-1/2}$$

d'égale valeur de u , pour des angles échelonnés de 5 en 5°, est effectué planche I (p. 67).

Les valeurs de la fonction β , pour des valeurs de α distantes de 0,01, le paramètre Ω variant de degré en degré, ont été complètement tabulées sur calculateur électronique, au moyen d'un programme joint (pl. II et III, pp. 68 et 70).

Toutes ces courbes se situent au-dessus de la bissectrice $\beta = \alpha$ (en effet, l'élimination de v implique $\beta > \alpha$), au-dessous de la droite $\beta = 1$, et passent par le point $\alpha = 1, \beta = 1$ pour lequel l'ellipsoïde étant une sphère, le point est un point singulier (fig. 19).

La mesure de l'angle des deux directions des axes optiques détermine donc la courbe en u sur laquelle nous nous trouvons. Il suffit de déterminer son intersection avec la droite :

$$\beta = \lambda + (1 - \lambda) \alpha.$$

Cette équation représente un faisceau de droites passant par le point $\alpha = 1, \beta = 1$, de pente $1 - \lambda$ et coupant l'axe des ordonnées en un point de cote λ . Il suffit donc de porter λ sur l'axe des ordonnées et de joindre au point $\alpha = 1, \beta = 1$ pour avoir la droite cherchée.

En traçant directement celle-ci sur le réseau en $u = \text{C}^{\text{te}}$ on a β et α par leur point d'intersection, d'où les axes principaux :

$$c = \frac{k}{1 - \alpha},$$

$$a = c \alpha,$$

$$b = c \beta.$$

Le graphique permet donc une détermination approchée immédiate des axes de l'ellipsoïde des indices, donc de l'ellipsoïde des contraintes.

Solution directe par résolution d'équations.

La résolution du système (3,23) peut être obtenue analytiquement. En effet, il suffit de substituer :

$$\beta = \lambda + (1 - \lambda) \alpha$$

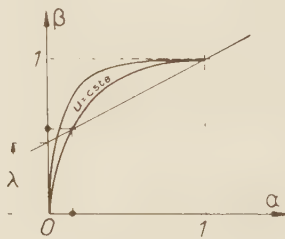


Fig. 19

dans la première équation :

$$\beta^2 u^2 (1 - \alpha^2) + \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

pour aboutir à une équation du quatrième degré en α :

$$[\lambda + (1 - \lambda) \alpha]^2 u^2 (1 - \alpha^2) + \alpha^2 - [\lambda + (1 - \lambda) \alpha]^2 = 0,$$

qui possède la racine $\alpha = 1$ et se réduit donc immédiatement au troisième degré :

$$(3,24) \quad (1 - \lambda)^2 u^2 \alpha^3 + (1 - \lambda^2) u^2 \alpha^2 - \lambda (2 - \lambda) (1 - u^2) \alpha - \lambda^3 (1 - u^2) = 0.$$

Le terme constant étant négatif :

$$f(\alpha, \lambda, u)_{\alpha=0} < 0.$$

D'autre part :

$$f(\alpha, \lambda, u)_{\alpha=1} = u^2 (1 + \lambda) - \lambda (1 + u)$$

est un trinôme en λ et u ne possédant pas de racine réelle, donc toujours du signe de $1 + \lambda$, soit positif.

Le produit :

$$f(\alpha, \lambda, u)_{\alpha=0} \cdot f(\alpha, \lambda, u)_{\alpha=1}$$

est toujours négatif et l'équation du troisième degré possède toujours au moins une racine réelle dans l'intervalle 0,1 qui nous intéresse.

La dérivée seconde s'annulant pour une valeur de $\alpha = -\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}$ négative, l'équation $f(\alpha, \lambda, u)$ n'a qu'une racine dans l'intervalle 0,1.

Il est donc toujours possible de résoudre l'équation en α , soit par méthode directe, soit au moyen d'un programme automatique qui, à partir des valeurs λ et u , calculera les coefficients de l'équation (3,2,4) (pl. IV, p. 72) et la résoudra immédiatement par une méthode de convergence, dite « auto-commandée » (1), dont le principe est résumé en annexe (pl. V et VI, pp. 74 et 75).

Remarquons que ces résolutions peuvent être effectuées sur commande dans des groupes de calcul. Elles demandent en moyenne 10 secondes pour l'obtention d'une solution avec quatre décimales exactes (précision, d'ailleurs, très surabondante); leur prix peut être évalué à environ 30 à 35 francs, par équation, à partir des valeurs de λ et u .

Ces résolutions, graphique ou numérique, permettent donc de connaître, en un point déterminé, la direction et la grandeur des axes principaux de l'ellipsoïde de FRESNEL ou de l'ellipsoïde des contraintes : le processus expérimental correspondant a fait l'objet d'une mise au point dont nous parlerons brièvement.

3,3 ASPECT EXPÉRIMENTAL ET MISE AU POINT

3,3.1 Mise au point de la méthode.

La difficulté la plus importante s'est présentée dès la préparation des premiers essais : en effet, si l'usinage d'une pièce comportant un feuillet plan photoélastique s'effectue relativement facilement, la réalisation d'un mode de charge permettant de conserver à la pièce trois degrés de liberté angulaire pour la recherche des axes optiques au banc photoélastique, n'est pas aisée.

Nos premiers essais de mise au point ont porté sur une poutre rectangulaire en flexion (*fig. 20*) : le feuillet photoélastique coïncide avec le plan de symétrie de la plaque.

La charge est appliquée en C au moyen de disques de fonte, rappelée en D par le levier OAB, et répartie en D' et D'' par deux appuis (*fig. 21*).

L'ensemble repose sur un plateau P par deux appuis P' et P'' qui, théoriquement, devraient être des couteaux. Le plateau P est un disque mobile autour d'un axe vertical, dont la rotation est repérée par rapport à l'axe horizontal du banc photoélastique.

(1) M^{me} C. L. GAUDFERNAU (1955). — Une méthode simple, dite « de convergence auto-commandée » pour la résolution, sur calculateur électronique, des équations algébriques ou transcendentes. N.T. n° 1, 1 665 P., O.N.E.R.A.

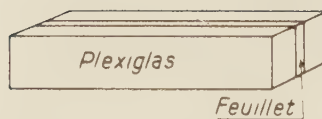


Fig. 20

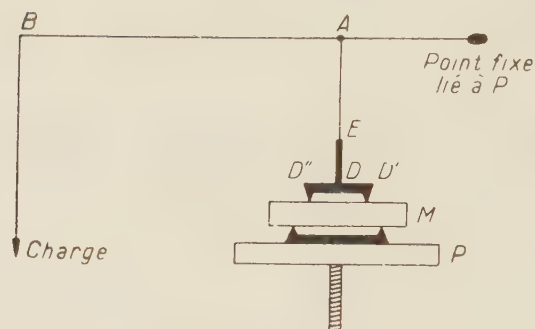


Fig. 21

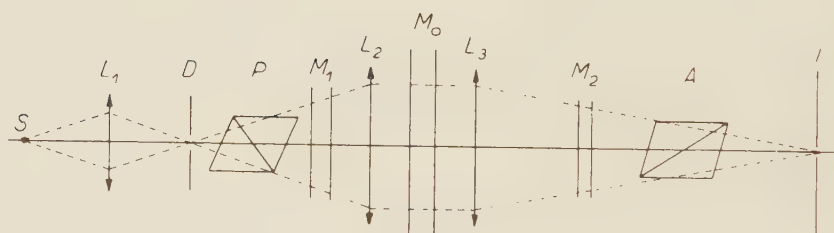


Fig. 22

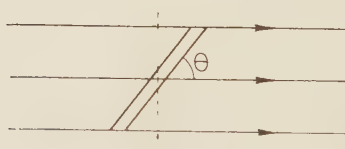


Fig. 23

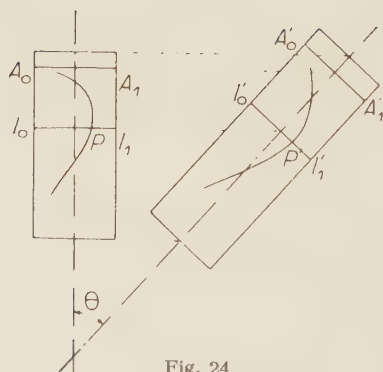


Fig. 24

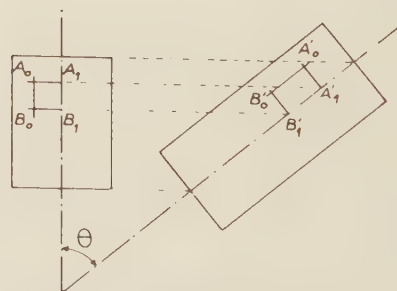


Fig. 25

Le banc dont nous avons pu disposer pour nos essais est un banc du modèle conçu par le Professeur LE BOITEUX, réalisé par JOBIN et YVON, et comportant des perfectionnements mécaniques (*fig. 22*) :

- commande à distance de la rotation des nicols P et A;
- commande à distance de la source S (lumière blanche ou monochromatique);
- projection agrandie sur écran;
- chambre photographique.

L'axe de rotation du modèle était, dans nos premières expériences, vertical.

L'image obtenue sur l'écran est la projection du modèle.

Il est donc nécessaire d'effectuer sur le relevé obtenu un « redressement » ayant pour but de restituer en vraie grandeur le feuillet observé; on peut alors y étudier l'évolution du champ de biréfringence (*fig. 23*).

Les relevés des isoclines, effectués pour des incidences de 0°, 24,5 g, 49 g, 56 g figurent sur les planches VII à X (pp. 78 à 81). Le procédé de redressement a consisté d'abord en un tracé des lignes (*fig. 24*) :

$$A_0 A_1, B_0 B_1, \dots I_0 I_1$$

rappelées en :

$$A'_0 A'_1, B'_0 B'_1, \dots I'_0 I'_1,$$

sur lesquelles chacun des points d'une isocline a été marqué en utilisant la conservation des longueurs :

$$I_0 P = I'_0 P'.$$

L'isocline « redressée » est obtenue en joignant les points P' issus des points P du relevé sur écran (pl. VIII, p. 79).

A ce procédé assez long et pénible a été substituée, pour les tracés suivants, l'utilisation d'un réseau orthogonal faisant correspondre à tout carré $A_0 A_1 B_1 B_0$ du relevé un rectangle $A'_0 A'_1 B'_0 B'_1$ de largeur $A'_0 A'_1 = A_0 A_1$ et de hauteur $A'_0 B'_0 = \frac{A_0 B_0}{\cos \theta}$ (*fig. 25*). Cette solution s'est révélée d'un emploi simple et rapide (pl. IX et X, pp. 80 et 81).

Nous pensions alors qu'il serait nécessaire, pour trouver la direction des axes neutres en un point M du modèle, d'effectuer un grand nombre de relevés, et de redressements complets, ce qui eût exigé un temps de dépouillement assez long. Le regroupement (pl. XI, p. 82) des points singuliers apparents sur une figure unique fait apparaître des lignes, ou « lieux des points singuliers apparents » dans la rotation autour de l'axe XX'.

Ce lieu est extrêmement simple à tracer puisqu'il suffit, pour chaque incidence, de relever deux isoclines correspondant à deux positions à 90 degrés l'une de l'autre de l'ensemble polariseur-analyseur, et de repérer leurs points communs qui, seuls, feront l'objet d'un redressement.

3.3.2 Interpolation graphique.

La facilité avec laquelle le lieu L des points singuliers apparents peut être tracé, permet de déceler la position des axes optiques par approximation. En effet, si deux points $P_1 P_2$ du lieu L encadrent le point M donné, à chacun des points P_i correspond une incidence. Il suffit alors, soit d'interpoler à vue si la variation de l'incidence est

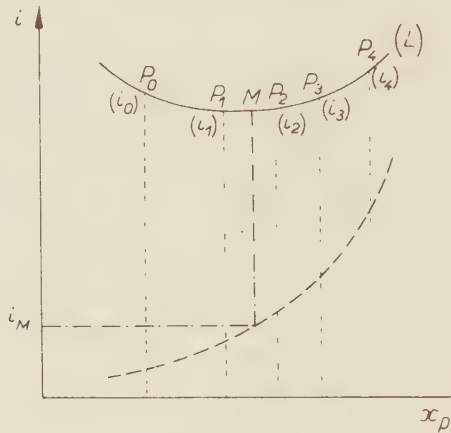


Fig. 26

linéaire en fonction de l'élément de longueur de L , ou de tracer une courbe (P, i) sur laquelle on rappelle le point M (fig. 26).

La position angulaire du feuillet — donc du modèle — est caractérisée au moyen de deux angles φ et ψ qui sont les cosinus directeurs des angles faits

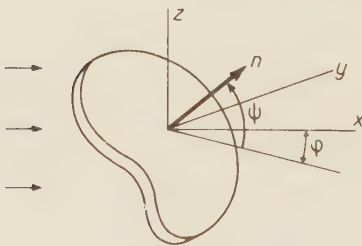


Fig. 27

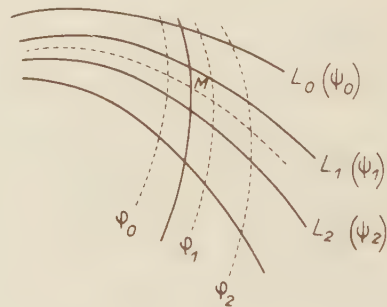


Fig. 28

par la normale $\vec{n}$ au feuillet avec les plans de projection xOy (plan horizontal de référence) et xOz (plan vertical) (fig. 27).

On effectuera alors un balayage systématique, par exemple à ψ constant, en faisant tourner le modèle autour d'un axe donné (Oz).

A chaque valeur de ψ correspond un lieu L , et l'ensemble de ces lieux constitue un réseau de courbes. Sur chacune de ces courbes (fig. 28) nous retrouvons les mêmes valeurs de φ qui, réunies, donnent un second réseau. La direction de l'axe optique en M s'obtient en interpolant simultanément les deux réseaux.

Quelques observations permettent de guider les mesures de façon à en réduire le nombre :

— lorsqu'un point est un point singulier réel il est point singulier apparent pour toutes les directions;

— si l'axe de rotation est tel que le plan décrit par la direction du faisceau incident coïncide avec le plan AOC — contenant le grand axe OC et le petit axe OA — la biréfringence s'annule deux fois et possède la plus grande variation;

— si le plan décrit par la direction du faisceau incident coïncide avec l'un des plans cycliques, la biréfringence ne varie pas au cours de la rotation.

3.3.3 Précision des mesures.

Les mesures angulaires effectuées au banc photoélastique sans montage spécial se font avec une précision supérieure au demi-degré.

La précision du repérage des directions des axes optiques, donc des plans et des axes principaux, varie essentiellement avec l'incidence du feuillet par rapport aux

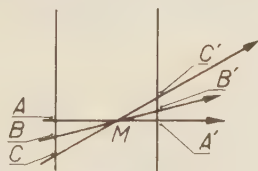


Fig. 29

axes optiques. Elle est de l'ordre du demi-degré dans les cas favorables, mais atteint même 3 à 5 degrés dans les cas les moins favorables. En particulier, il est assez difficile de distinguer parfois les zones neutres des zones où le gradient d'angle des axes optiques est très grand. Ceci est dû en partie à l'obliquité de l'incidence; par exemple, le rayon incident CC' n'intègre pas les contraintes suivant la normale au feuillet. On constate, par ailleurs, une légère déformation de l'image en projection agrandie sur écran (*fig. 29*).

Il est ainsi utile de posséder pour un examen précis, deux modèles comportant respectivement un feuillet dans des plans orthogonaux passant par le point à étudier.

La précision des résolutions graphique et numérique étant excellente, les perfectionnements doivent être d'un ordre technique et porter principalement sur les points suivants :

- réalisation d'une suspension mécanique à la CARDAN;
- repérage précis des positions angulaires;
- mise au point d'un tracé, ou d'un quadrillé sur le feuillet de façon à pouvoir suivre le point sous diverses incidences.

Remarquons pourtant que l'intuition et l'observation des modes de variation de la biréfringence permettent de réduire les tracés inutiles, et surtout de faire un choix judicieux des axes de rotation. Par ailleurs, il est évident qu'une étude préalable des symétries ou des dégénérescences possibles, simplifie le processus de mesure.

3,3.4 Processus opératoire.

Résumons brièvement les étapes successives d'une détermination :

- recherche par rotation, des directions des axes optiques;
- détermination de la direction des trois axes principaux : les deux bissectrices des angles des axes optiques, la normale au plan qu'ils définissent;
- le rayon incident étant successivement orienté suivant l'axe moyen et l'un des autres axes, mesure des biréfringences correspondantes;
- détermination graphique ou numérique de la grandeur des axes principaux au moyen des deux mesures de biréfringence et de l'angle des axes optiques;
- enfin, détermination des contraintes sur un élément passant par le point donné et d'orientation quelconque au moyen d'une extension du cercle de MOHR aux problèmes tridimensionnels.

3,4 DÉTERMINATION DES VALEURS DES CONTRAINTES SUR UN ÉLÉMENT D'ORIENTATION DONNÉE AU MOYEN D'UNE EXTENSION DU CERCLE DE MOHR

Cette généralisation, indiquée par le Professeur LE BOITEUX, est en effet indispensable en raison de l'importance du problème du critérium de rupture, mais la représentation de MOHR, pour les répartitions tridimensionnelles de contraintes, se présente sous un aspect plus complexe que pour les répartitions planes [67].

La représentation de MOHR (*fig. 30*) met en effet en évidence les composantes normale (nn) et tangentielle (nt) de la contrainte F s'exerçant sur un élément dS défini par sa normale $\vec{n}$, de cosinus directeurs l, m, n . Elle consiste à représenter l'extrémité de la contrainte dans un système d'axes (nt), (nn) liés à l'élément dS et à la contrainte F .

Les axes principaux a, b, c en M ayant été déterminés précédemment, MOHR a démontré que le point P se trouve dans la région hachurée comprise entre les trois cercles centrés (*fig. 31*) sur (nn), d'abscisses :

$$\frac{a+b}{2} \quad \frac{a+c}{2} \quad \frac{b+c}{2}$$

et de rayons respectifs :

$$\frac{b-a}{2} \quad \frac{c-a}{2} \quad \frac{c-b}{2}.$$

Deux procédés de construction du point P ont été donnés dans le travail cité en référence [67].

Nous citerons seulement le second procédé qui généralise la représentation bidimensionnelle; ce procédé, plus long mais plus complet, établit les relations entre les cosinus directeurs l, m, n de la normale à l'élément, et les cosinus directeurs l', m', n' de la contrainte F .

Les équations de la théorie de l'élasticité donnent directement :

$$(3,4.1) \quad (nn) = al^2 + bm^2 + cn^2;$$

$$(3,4.2) \quad F^2 = a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2.$$

Cherchons à évaluer l'angle $\alpha = (OI, O,P)$ (fig. 32).

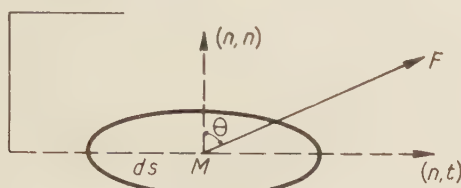


Fig. 30

En calculant successivement :

$$O_1 I = al^2 + bm^2 + cn^2 - \frac{1}{2}(a + b),$$

puis :

$$O_1 P^2 = \frac{1}{4}(a + b)^2 + a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2 - (a + b)(al^2 + bm^2 + cn^2),$$

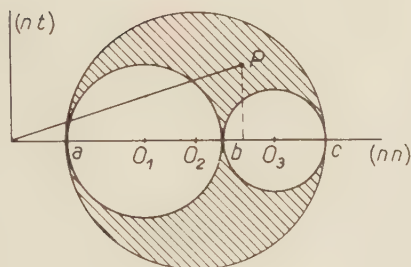


Fig. 31

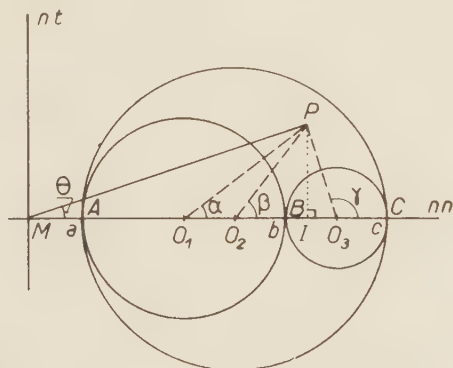


Fig. 32

nous obtenons l'expression de $\cos \alpha$:

$$(3,4.3) \quad \cos \alpha = \frac{2(al^2 + bm^2 + cn^2) - (a + b)}{\sqrt{(b - a)^2 + 4n^2(ab - ac - bc) + 4n^2c^2}};$$

de même, les angles β et γ des droites $O_2 P$ et $O_3 P$ avec l'axe des abscisses nn :

$$(3,4.4) \quad \cos \beta = \frac{2(al^2 + bm^2 + cn^2) - (a + c)}{\sqrt{(c - a)^2 + 4m^2(ac - ab - bc) + 4b^2m^2}}$$

et :

$$(3,4.5) \quad \cos \gamma = \frac{2 (al^2 + bm^2 + cn^2) - (b + c)}{\sqrt{(c - b)^2 + 4 l^2 (bc - ac - ab) + 4 a^2 l^2}}.$$

D'autre part, l'angle θ de la contrainte F avec la normale n s'exprime par :

$$(3,4.6) \quad \cos \theta = ll' + mm' + nn' = \frac{al^2 + bm^2 + cn^2}{\sqrt{a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2}}.$$

L'ensemble de ces relations, qui permet de localiser le point P correspondant à un élément dS , est une généralisation du cas de l'élasticité plane. En effet, lorsque a et n sont nuls simultanément, cette représentation se réduit à trois cercles tels que deux d'entre eux sont tangents à l'axe (nt) et le point représentatif P se trouve sur le cercle de centre O_3 .

La représentation, dans le cas des répartitions tridimensionnelles, permet une étude plane simple de l'évolution de la contrainte en fonction de l'orientation de l'élément dS . Nous y retrouvons rapidement quelques cas particuliers :

— lorsque dS coïncide avec l'un des plans principaux (par exemple, AOB), son orientation est définie par :

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 1,$$

ce qui entraîne :

$$\cos \alpha = 1 = \cos \beta = \cos \gamma,$$

$$F^2 = C^2,$$

et le point représentatif P est en C . Le vecteur OP n'a pas de composante tangentielle;

— les points A , B , C sont les seuls points, donc les seules orientations de l'élément dS , pour lesquelles la contrainte est normale à dS ;

— le point pour lequel la contrainte tangentielle est maximum est celui pour lequel $\beta = 90^\circ$ et où P est sur le cercle de centre O_2 .

La contrainte tangentielle est alors égale à $\frac{1}{2}(c - a)$ et la contrainte normale à $\frac{1}{2}(c + a)$.

On peut alors déduire des équations (3,4.1), (3,4.2) et de la condition $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, les cosinus directeurs de la normale $\vec{n}$ à l'élément de surface correspondant, par résolution du système :

$$\frac{1}{2}(c + a) = al^2 + bm^2 + cn^2,$$

$$\frac{1}{4}(c - a)^2 = a^2 l^2 + b^2 m^2 + c^2 n^2,$$

$$1 = l^2 + m^2 + n^2.$$

Remarquons que la valeur de la contrainte tangentielle maxima est obtenue dès le début des mesures puisque les directions des axes optiques permettent de déterminer la direction de l'axe moyen de l'ellipsoïde des indices, et de connaître la différence $c - a$ par mesure de biréfringence. Par contre, la direction de l'élément dS correspondant nécessite la connaissance des longueurs a , b et c .

L'ensemble de ces mesures et l'utilisation du cercle de MOHR pour les problèmes tridimensionnels permettent donc de mesurer :

- la direction des axes optiques;
 - la direction des axes principaux;
 - leur grandeur;
 - la valeur de la contrainte de cisaillement maxima;
 - l'orientation de l'élément correspondant;
 - les contraintes tangentielle et normale sur un élément d'orientation quelconque.
-

4 APPLICATION DE LA MÉTHODE A UN EXEMPLE DE POUTRE EN TORSION

Nous avons choisi comme exemple, pour la mise au point définitive de la méthode tridimensionnelle, un cylindre dont la base est un secteur circulaire. Nous l'avons supposé soumis à une torsion pure d'axe parallèle aux génératrices.

4,1 ÉTUDE THÉORIQUE

Dans tout ce paragraphe nous avons volontairement omis les développements analytiques de façon à marquer uniquement les étapes du raisonnement.

4,1.1 Contraintes.

La solution du problème de la poutre considérée, soumise à une torsion pure, est due à DE SAINT-VENANT ⁽¹⁾. Il a montré que la fonction de la tension est donnée par la série trigonométrique illimitée :

$$(4,1) \quad \varphi = \frac{G \theta}{2} \left[-r^2 \left(1 - \frac{\cos 2 \psi}{\cos \alpha} \right) + 16 \frac{\alpha^2 a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{\cos \frac{n\pi\psi}{\alpha}}{n \left(n - \frac{2\alpha}{\pi} \right) \left(n + \frac{2\alpha}{\pi} \right)} \right].$$

où :

a = rayon du secteur circulaire;

α = angle au centre du secteur circulaire;

r, ψ = coordonnées polaires d'un point quelconque;

θ = angle de torsion unitaire;

G = module d'élasticité transversale.

(1) DE SAINT-VENANT (1878). — *Comptes rendus*, vol. 87, pp. 849 et 893.

Les tensions sont données par les dérivées partielles par rapport aux coordonnées rectangulaires x et y , de la fonction de tension exprimée en fonction de x et y .

La pièce étant rapportée à un trièdre direct, Ox , Oy dans le plan de la section droite, Oz suivant l'axe neutre, les seules contraintes non nulles sont (zx) et (zy) dans le plan de la section (fig. 33).

L'expression analytique de ces contraintes, obtenue ⁽¹⁾ après quelques transformations faisant surtout appel aux périodicités des fonctions trigonométriques, a la forme suivante :

$$(4,2) \quad (zc) = G \theta a \left[-\frac{r}{a} \operatorname{tg} \alpha + \frac{8 \alpha}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{1}{n^2 - \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^2} \right] \dots - k G \theta a$$

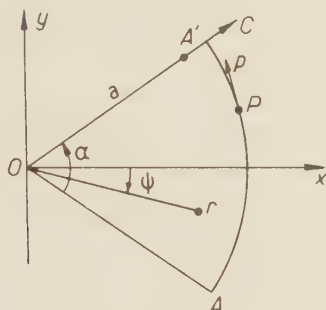


Fig. 33

le long des côtés rectilignes du secteur, et en un point P du contour circulaire :

$$(4,3) \quad (zp) = -G \theta a \left[\frac{\cos 2\psi}{\cos \alpha} - 1 + \frac{8 \alpha}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\cos \frac{n\pi\psi}{\alpha}}{n^2 - \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^2} \right].$$

En particulier, au milieu du contour circulaire :

$$(4,4) \quad (zp)_{\max} = -G \theta a \left[\frac{1}{\cos \alpha} - 1 + \frac{8 \alpha}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n^2 - \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^2} \right] = k' G \theta a.$$

Les courbes représentant la variation des coefficients k et k' pour divers angles au centre sont représentées planches XII et XIII (pp. 83 et 84). On y observe en particulier, lorsque l'angle au centre est supérieur à π , l'effet d'entaille, traduit par les valeurs infinies du coefficient k au centre O du secteur.

L'ensemble des développements en série ainsi déterminés est rapidement convergent et le calcul numérique se fait sans difficulté.

(1) Ces calculs sont développés dans une publication [6] que nous avons faite en 1951; ils font apparaître quelques erreurs numériques dans les résultats publiés dans la *Théorie de l'Elasticité*, de TIMOSHENKO, p. 270.

4,1.2 Centre de torsion — Critères de définition.

En particulier, nous avons cherché à compléter cette étude par la détermination des points pour lesquels la contrainte présente un maxima sur le contour. Ces points se trouvent situés :

- au milieu du contour circulaire, sur l'axe de symétrie de la section ;
- en deux points, symétriques par rapport à l'axe, sur les côtés rectilignes du contour.

Ce sont les points du contour les plus proches du point, dit « centre de torsion », situé sur l'axe de symétrie Ox .

Si ce point est mentionné dans un grand nombre d'ouvrages, sa détermination fait appel à divers critères, parmi lesquels nous citerons :

- point de concours des normales aux points de contrainte maxima du contour;
- centre du plus grand cercle inscrit dans la section;
- centre de gravité de la section;
- centre de torsion déterminé comme point d'application du couple de torsion produisant une torsion pure non accompagnée de flexion ⁽¹⁾, point particulièrement important pour les ailes d'avion. Le centre de torsion défini par ce dernier critère est alors sur l'axe Ox , et son abscisse est donnée par l'équation suivante :

$$(4,5) \quad I_x \xi = - \iint y \Phi d\omega + \frac{\nu}{1+\nu} \left[\iint \varphi x d\omega - x_G \iint \varphi d\omega \right],$$

où :

φ est la fonction de tension (4,1), constante sur le contour et indépendante du choix des axes;

Φ est une fonction harmonique définie par :

$$(4,6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y, \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + x; \end{aligned}$$

I_x est le moment d'inertie de la section par rapport à Ox ;

x_G est l'abscisse du centre de gravité de la section;

$d\omega$ est l'élément de surface de la section;

ν est le coefficient de POISSON du matériau utilisé.

(1) J. MANDEL (1948). — *Détermination du centre de torsion à l'aide du théorème de réciprocité*. Annales des Ponts et Chaussées. 118^e année, n° 3, mai-juin 1948.

4,1,3 Détermination du centre de torsion — Comparaison des définitions.

Nous avons recherché une expression analytique de la fonction dans le cas de la poutre étudiée; partant de (4,1) on arrive, après calculs pénibles mais sans difficulté, à l'expression :

$$(4,7) \quad \Phi = -r^2 \frac{\sin 2\psi}{2 \cos \alpha} - \frac{8 \alpha^2 a^2}{\pi^3} \sum_{1.3..} A_n \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin \frac{n\pi\psi}{\alpha},$$

où :

$$A_n = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{n \left(n + \frac{2\alpha}{\pi}\right) \left(n - \frac{2\alpha}{\pi}\right)}.$$

L'abscisse du centre de torsion peut se calculer à l'aide des relations :

$$(4,8) \quad I_x \xi = I_1 + \frac{\sigma}{1 + \sigma} (I_2 + I_3),$$

$$I_1 = \frac{2 \alpha^5 \sin^3 \alpha/2}{15 \cos \alpha} - 16 \frac{\alpha^5 \alpha^5}{\pi^6} \cos \frac{\alpha}{2} \sum_{1.3.5} \frac{1}{\left(n^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) \left(n + \frac{3\alpha}{\pi}\right) n \left(n^2 - \frac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)},$$

$$I_2 = \frac{2 \alpha^5 \sin \alpha/2 (1 - \cos \alpha)}{15 \cos \alpha} - 16 \frac{\alpha^5 \alpha^4}{\pi^5} \cos \frac{\alpha}{2} \sum_{1.3.5} \frac{n}{\left(n^2 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) \left(n + \frac{3\alpha}{\pi}\right) n \left(n - \frac{4\alpha^2}{\pi^2}\right)},$$

$$I_3 = \frac{4 \alpha \sin \alpha/2}{3 \alpha} \frac{\alpha}{\alpha} \left[\frac{\alpha^4}{8} (\alpha - \operatorname{tg} \alpha) + \frac{16 \alpha^4 \alpha^4}{\pi^5} \sum_{1.3.5} \frac{1}{n^2 \left(n - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \left(n + \frac{2\alpha}{\pi}\right)^2} \right].$$

Le calcul numérique de l'abscisse ξ , puis du point du contour le plus proche du centre de torsion, pour deux valeurs du coefficient de Poisson choisies nulle et égale à 1/4, a été représenté par les courbes 1 et 2, planche XIV (p. 85), auxquelles nous avons joint les courbes figurant respectivement :

- l'abscisse du point le plus proche du centre du plus grand cercle inscrit (3);
- l'abscisse du point le plus proche du centre de gravité (4);
- l'abscisse (5) du maximum de l'expression analytique de la tension définie par l'équation (4,2).

On peut ainsi comparer analytiquement sur cet exemple complet les divers critères de définition du centre de torsion :

a) les courbes (3) et (4) sont divergentes pour les faibles valeurs de α . Or, la définition de la courbe (3) est expérimentale et due surtout aux résultats de l'analogie par la méthode du film de savon (rapports du N.A.C.A.);

- b) ces courbes encadrent les courbes (1), (2) et (5);
- c) le coefficient de Poisson n'a qu'une influence faible;
- d) la courbe théorique (5) s'éloigne considérablement des autres courbes pour les valeurs importantes de l'angle au centre α .

Cas particulier.

Le modèle utilisé pour nos expériences est une poutre dont la section normale est un secteur circulaire d'angle au centre $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Cette valeur particulière, choisie en raison d'une relative simplicité d'usinage, correspond à une singularité des expressions obtenues précédemment. L'indétermination qui apparaît simultanément dans les termes $\operatorname{tg} \alpha$ ou $\frac{1}{\cos \alpha}$, et dans le premier terme des séries (lorsque $n = 1$), est levée au moyen de développements en série, et aboutit en particulier à cette expression de la tension :

$$k = \frac{r}{a} L \frac{r}{a} - \frac{r}{a} \sum_{3.5 \dots} \frac{1}{n^2 - 1} + \sum_{3.5} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n-1} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

4,2

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DESCRIPTION DES EXPÉRIENCES

Nous avons déjà souligné, à propos des essais de mise au point de la méthode (3,3), les difficultés pratiques soulevées par les études de photoélasticité à trois dimensions.

Nous ne pouvions envisager l'étude et la réalisation d'une suspension à la CARDAN avec repérage précis des angles. Aussi, nous nous sommes ainsi contentés de deux degrés de liberté dans les mouvements de nos modèles sous charges.

Nous avons fait usiner divers barreaux cylindriques de mêmes dimensions. Ces modèles diffèrent par la disposition des feuillets photoélastiques :

- parallèle aux génératrices;
- suivant une section droite;
- oblique.

Feuillets : plexiglas, $n = 1,490$,

Modèle : plexiglas, $n = 1,495$.

Un montage mécanique rigide, schématisé ci-contre (*fig. 34 et 34 bis*), tient le modèle en charge à déplacement imposé. Le dispositif mécanique, mobile autour d'un axe horizontal, est immergé dans une cuve cubique en plexiglas. Cette cuve est elle-même fixée sur un plateau gradué mobile autour de son axe vertical. Les déplacements angulaires autour de l'axe horizontal sont repérés sur un rapporteur lui-même immergé.

Liquide d'immersion	{	Tétraline	30 %,
		Huile de vaseline	70 %.

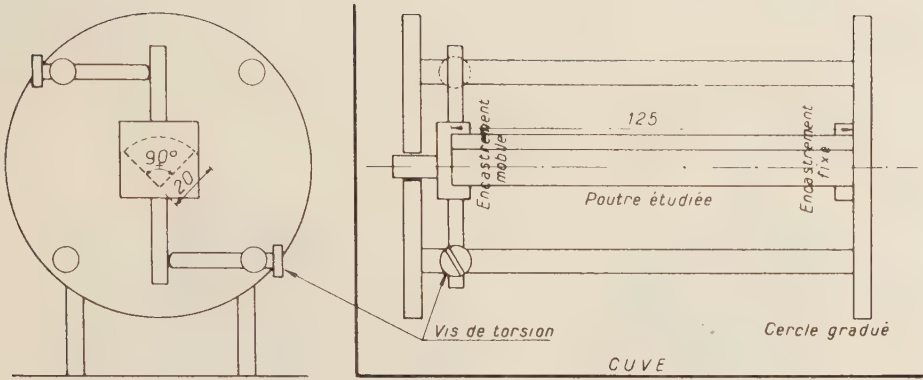


Fig. 34. — Schéma de principe du montage de torsion

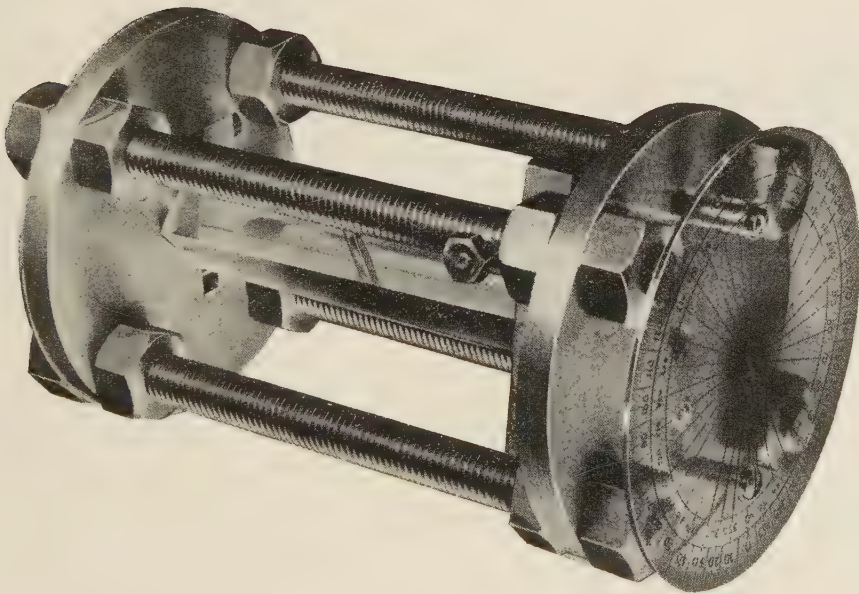


Fig. 34 bis

L'examen des modèles au banc photoélastique nous a conduits à éliminer successivement :

— le *feuillelet longitudinal* présentant un faible gradient de biréfringence et la plus grande déformation;

— le *feuillelet transversal* (fig. 34 ter), en raison des angles morts du montage nous astreignant à une observation sous incidence très grande.

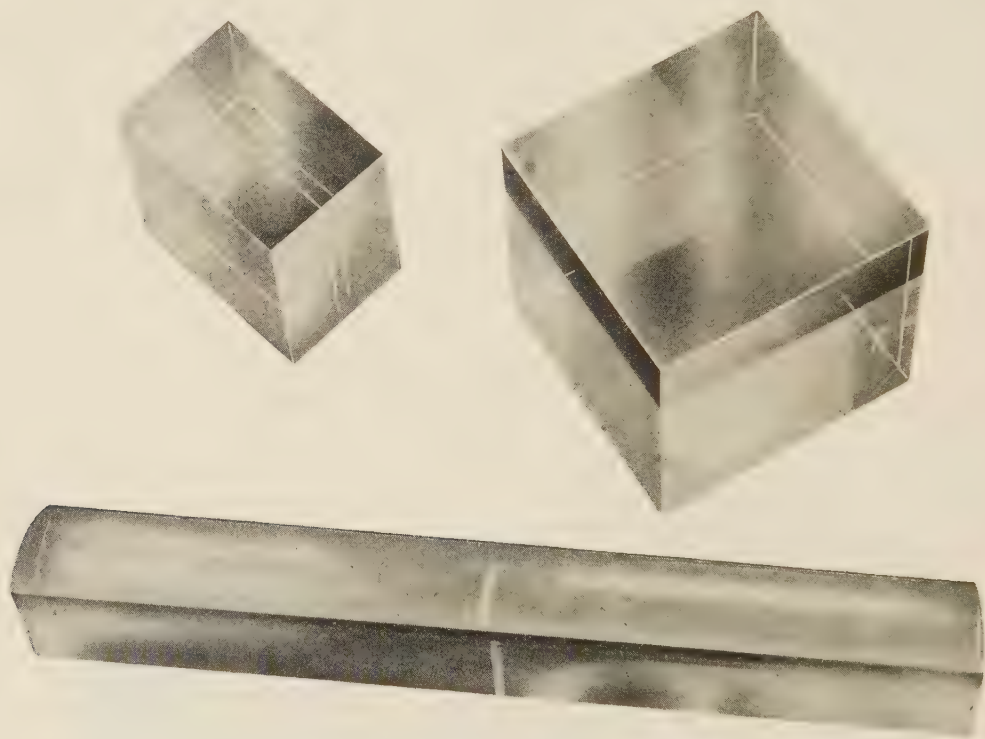


Fig. 34 ter

Par contre, le *feuillelet oblique* présente un gradient de biréfringence assez élevé et permet des incidences raisonnables.

Les relevés effectués ont consisté en :

- tracé des isoclines pour différentes orientations du plateau et du modèle;
- tracé des isochromes.

En réalité, ce dernier tracé fait apparaître seulement un point, au centre de la section, où l'isochrome est d'ordre 0, et deux points, sur le contour, où l'on observe, de l'ordre 1. Il a donc fallu relever les isochromes d'ordre fractionnaire, selon la méthode TARDY.

Quelques-uns des relevés sont groupés planche XV (p. 86).

Résultats (pl. XV).

L'examen des isoclines met en évidence la présence d'un *point singulier réel* par lequel passent toutes les lignes lieux de points singuliers apparents sous les diverses incidences. Ce point est situé dans le plan de symétrie du modèle, sur l'axe Ox , à une distance $\frac{r}{a} = \frac{0,29}{0,44} = 0,66$, correspondant donc à l'abscisse :

$$0,66 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,465.$$

L'imprécision sur cette mesure étant inférieure au demi-millimètre, la valeur ainsi déterminée est limitée par :

$$0,46 \leq x \leq 0,475.$$

Ce point, neutre dans la torsion, coïncide d'une façon satisfaisante avec le *centre de torsion* (5) défini par le maximum de l'expression analytique de la contrainte. La valeur théorique étant 0,46, nous pouvons même considérer la précision comme excellente.

Le tracé des isochromes permet de retrouver le point d'ordre 1 sur le bord rectiligne du contour, correspondant au point de contrainte tangentielle maximum : la valeur obtenue est alors 0,455, qui contrôle assez bien la mesure précédente.

Le repérage des axes optiques dans l'espace est, par contre, assez malaisé, et il devient nécessaire de s'aider d'une représentation sphérique.

Remarquons que l'angle dû à la rotation et au gauchissement des sections n'était pas appréciable par rapport à la mesure de l'orientation du modèle.

Les premières mesures font apparaître une symétrie par rapport à la section normale et nécessitent des mesures de biréfringence dans les plans de symétrie longitudinal et transversal du modèle.

Nous avons déterminé un certain nombre d'orientations d'axes optiques qui, dans nos premiers essais, conduisaient à des mesures de biréfringence dans les angles morts de notre montage. Ces angles morts importants dans cette mécanique extrêmement sommaire, nous ont amenés à retoucher la structure du montage. De nouveaux essais sont actuellement en cours pour mener à bien une comparaison significative entre les résultats expérimentaux de la méthode et les résultats théoriques exposés précédemment.

CONCLUSION

Les efforts de ces dernières années n'empêchent pas, pensons-nous, que les méthodes photoélastiques restent l'apanage de quelques laboratoires. La photoélasticité est peu développée par rapport aux techniques de strain-gages, par exemple qui, pourtant, à quelques rares exceptions, s'appliquent seulement aux réalisations. Nombreux sont les projets qui nécessiteraient une étude sérieuse de photoélasticité.

Cette situation s'explique sans doute par la limitation aux problèmes plans de la photoélasticité courante; outre, il faut reconnaître que les méthodes de contrôle au stade projet ou avant-projet doivent être parfaitement définies pour justifier leur application.

Nous pensons ainsi qu'il est utile de mettre au point des méthodes photoélastiques tridimensionnelles sûres, d'emploi commode, et d'utilisation rapide. Il n'y a pas d'empêchement sérieux à la réalisation de laboratoires répondant à ces caractéristiques.

La méthode tridimensionnelle que nous présentons répond en grande partie à ces exigences. L'utilisation de l'ellipsoïde des indices, associée au tracé facile des lieux de points singuliers, permet de définir le complexe des axes principaux, sans manœuvre particulière en chaque point calculé. La mesure des contraintes principales par une méthode graphique simple, ou numérique, à la portée de tous les laboratoires, est plus facile que les méthodes usuelles d'intégration.

Par contre, si le principe de la méthode est acquis, un assez difficile problème de mécanique reste à résoudre :

- suspension à la CARDAN du modèle dans son dispositif de charge;
- mesures dans une cuve à immersion;
- recherche d'un procédé de tracé de réseau sur le feuillet; ce tracé faciliterait beaucoup le dépouillement;
- mise au point d'un dispositif de redressement du relevé graphique.

L'étude photoélastique des problèmes dynamiques tridimensionnels, théoriquement possible par cette méthode, n'est peut-être pas à un stade très éloigné.

BIBLIOGRAPHIE

Certaines références, sur lesquelles nous nous sommes plus particulièrement appuyés au cours de cette étude, ont été brièvement résumées.

Nous avons classé les documents sous les rubriques suivantes :

1. — **Généralités (élasticité, optique).**

2. — **Méthodes diverses de photoélasticité à deux dimensions.**

2,1. — *Figeage.*

2,2. — *Lumière diffuse.*

2,3. — *Méthode de FAVRE-MESNAGER.*

2,4. — *Vernis craquelants.*

2,5. — *Autres méthodes.*

3. — **Études particulières en photoélasticité à trois dimensions.**

Dans chaque rubrique les références sont classées par ordre alphabétique.

1. — GÉNÉRALITÉS (ÉLASTICITÉ, OPTIQUE)

- [1] ARTHUR R. E. (1943). — *Introduction to the theory of Photoelasticity and its application to problems of Stress Analysis*. J. of the Royal Aeronautical Society, vol. 47 (1943), pp. 263/72.
Introduction classique des principes fondamentaux de la photoélasticité : propagation d'une onde; nature de la lumière; prisme de Nicol; cristaux; propagation de la lumière dans les cristaux; ellipsoïde; influence des contraintes; isoclines; isochromes; mesures photoélastiques.
- [2] BONVALLET M. — *La similitude des maquettes en élasticimétrie. Exemples d'application*. Bulletin du G.A.M.A.C., t. II, n° 2.
Étude théorique et pratique sur la similitude : équations de forme, de matériaux; très complet.
- [3] COKER, FILON (1931). — *A treatise on photoelasticity*. Cambridge Un. Press (1931).
- [4] FROCHT M. M. (1948). — *Some simplifications in the numerical solutions of LAPLACE's equation with Special Applications to photoelasticity*. Proc. Soc. for Experimental Stress Analysis, vol. 6, n° 1, pp. 39-43.
Méthode graphique permettant de déterminer les valeurs initiales pour la résolution numérique de l'équation de LAPLACE à laquelle satisfait une fonction harmonique dont les valeurs sur le contour sont connues (méthode de la « rosette linéaire »). Application à quelques cas précis (en association avec un quadrillage).
- [5] FROCHT M. M. (1948). — *Photoelasticity*. John Wiley Sons inc. (1948).
Un des ouvrages de base.
- [6] GAUDFERNAU C. L. (1951). — *Contribution à l'étude des contraintes dans les pièces cylindriques soumises à la torsion* (M^{lle} SCHWARTZ). Publication O.N.E.R.A. (1951), Technique et Science Aéronautiques, n° 2.
- [7] HETENYI M. (1950). — *Handbook of Experimental Stress Analysis*. J. WILEY (1950).
Sorte d'encyclopédie étudiant toutes les méthodes. Dépasse largement le cadre de la photoélasticité.
- [8] HOUWINK R. (1937). — *Elasticity, Plasticity and structure of Matter*. Cambridge University Press (1937).
Ouvrage consacré plus spécialement à la plasticité, aux cristaux ainsi qu'aux modifications de structure cristalline.
- [9] JESSOP H. T., HARRIS F. C. (1949). — *Photoelasticity*. Cleaver, hume press L.T.D., Londres (1949). Traduction française par HENRIOT G., Dunod (1952).
- [10] JESSOP H. T. (1953). — *Possibilités et limites de la méthode photoélastique de détermination des contraintes*. Journal of the Roy. Aeronautical Society (1953).
Article très général sur la photoélasticité, ses applications particulières, ses perspectives d'avenir.
- [11] JOHANNSEN A. (1918). — *Manual of petrographic methods*. Mac Graw-Hill book Co., N. Y. (1918).
- [12] JUSTAFFRE (1952). — *Photoélasticité*. Ingénieurs et Techniciens, n° 45 (juin 1952), pp. 11/17.
Exposé élémentaire de notions d'élasticité plane, des méthodes photoélasticimétriques. Exemple : pignon denté.

- [13] KAMMERER A. (1944). — *Recherches sur la photoélasticimétrie*. Paris, Hermann et C^{ie} (1944).

Mise au point de l'état d'avancement des techniques de photoélasticimétrie : rappel de résistance des matériaux; similitudes modèles et pièce; photoélasticité : notions générales; cas particuliers, ponts, frettage. Photoélasticité à trois dimensions : étude d'un cylindre; modèles de forme quelconque.

- [14] KASTLER A. (1952). — *La diffusion de la lumière par les milieux troubles. Influence de la grosseur des particules*. Hermann et C^{ie}, Paris (1952).

- [15] LE BOITEUX H. (1940), BOUSSARD R. — *Élasticité et photoélasticité*. Hermann (1940).
Traité général.

- [16] LE BOITEUX H. (1954). — *Théorie de la déformation élastico-visqueuse. Extension aux phénomènes de fatigue*. Mémoires du Groupement pour l'Analyse des contraintes, t. II, n° 3.

- [17] LEE, ARMSTRONG (1938). — *Effect of temperature on photoelasticity and optical properties of photoelastic materials*. J. of Appl. Mech., vol. 5, n° 1, pp. A.11-A.12 (1938).

- [18] MINDLIN R. D. (1939). — *A review of the photoelastic — Method of Stress Analysis*. J. of Applied Physics, vol. 10, n° 4 (1939), pp. 222/241.

- [19] MINDLIN R. D. (1939). — *A review of the photoelastic — method of Stress Analysis*. J. of Applied Physics, vol. 10, n° 5 (1939), pp. 273/294.

Exposé assez complet et très clair, dans ces deux articles; notions générales, notations, effet photoélastique, mesure optique des contraintes en photoélasticité plane, énumération des matériaux employés, mesures classiques.

- [20] MINDLIN R. D. (1949). — *A mathematical Theory of Photo-viscoelasticity*. Journal of Applied Physics, vol. 20, n° 2 (1949), pp. 206/216.

Rappels divers. Les applications aux phénomènes visqueux sortent du cadre de la présente étude.

- [21] MINDLIN R. D., GOODMAN L. E. (1949). — *The optical equations of three dimensionnal photoelasticity*. J. of Applied Physics, vol. 20 (janvier 1949), pp. 89/95.

Étude de la propagation de la lumière dans un milieu hétérogène, non isotrope. Les cas les plus généraux ont été traités par NEUMANN. Le présent article donne un rapprochement entre les équations de NEUMANN et celles de MAXWELL. Calcul de l'ordre de grandeur des approximations effectuées. Obtentions d'équations assez simples. Mise en évidence d'un paramètre fondamental.

- [22] OSGOOD W. R. (1943). — *The center of Shear Again*. J. of Applied Mechanics (juin 1943), vol. 10, n° 2, trans A.S.M.E., p. A. 62.

Centre de contrainte. Les publications font apparaître un désaccord sur la position de ce point qui, d'après TIMOSHENKO, dépendrait du coefficient de POISSON, alors que TREFFTZ affirme le contraire. Les deux solutions sont compatibles à condition de satisfaire à d'autres conditions au contour, proposées par l'auteur, et qui conduisent à un centre unique.

- [23] SADOWSKY M. A. (1941). — *Classification des points isotropes définis par $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$* . J. of Applied Physics, vol. 12, n° 8 (août 1941).

Classification très complète, indice caractéristique de la classification. Fonction d'IRY. Cas de la photoélasticité plane uniquement.

- [24] THIRY R. — *Notions d'élasticité*. Cours professé à la Sorbonne (Fédération des étudiants de Paris).

- [25] TIMOSHENKO S. (1945). — *Résistance des matériaux*. Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris (1947).

- [26] TIMOSHENKO S. (1948). — *Théorie de l'Élasticité*. Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris (1948).
- [27] TIMOSHENKO S. (1953). — *History of Strenght of materials*. Mac Graw-Hill (1953).
Histoire de la résistance des matériaux, de l'élasticité, de la théorie des structures, des origines à 1950. Interprétation très « outre-Atlantique ». Renseignements intéressants; premier travail important de ce genre. Style inégal dû sans doute à plusieurs auteurs.
- [28] WAHLSTROM E. E. (1943). — *Optical cristallography*. John Wiley, N. Y. (1943).
Traité intéressant mais trop axé sur l'étude des cristaux pour les applications à la photoélasticité.
- [29] WESTERGAARD H. M. (1941). — *Displacements determined by AIRY's Stress fonction*. J. of Applied Mechanics (mars 1941), vol. 8, n° 1, trans A.S.M.E. A. 1.
Lorsque les constantes élastiques sont connues, la fonction d'AIRY permet de calculer les contraintes par des formules simples, mais le calcul des déplacements est moins immédiat. La solution proposée est une variante de la solution de LOVE et utilise les fonctions de variable complexe.
- [30] WOOD R. (1934). — *Physical Optics*. Mac Millan Co., N. Y. (1934).
Traité élémentaire d'optique.

2. — MÉTHODES DIVERSES EN PHOTOÉLASTICITÉ A DEUX DIMENSIONS

2,1 Figeage.

- [31] AUBAUD J. (1950). — *Détermination par la méthode photoélastique d'une forme d'éprouvette de traction pour matériaux frittés*. Recherche Aéronautique, n° 17 (1950).
- [32] AUBAUD J. (1951). — *Étude des congés d'un engrenage droit par la méthode photoélastique*. Recherche Aéronautique, n° 22 (1951).
- [33] AUBAUD J. (1952). — *Recherches sur la relation contrainte-biréfringence dans le plexiglas M. 222*. Recherche Aéronautique, n° 26 (1952).
- [34] COOLIDGE D. J. (1948). — *An investigation of the Mechanical and Stress optical properties of Columbia Resin CR. 39*. Proc. of Soc. for Experimental Stress Analysis, vol. 6, n° 1, pp. 74-82 (1948).
Étude expérimentale des relations effort-contrainte, de l'effet du temps d'application de la charge, charge de rupture, influence des conditions atmosphériques. Exemple classique du barreau à entailles circulaires.
- [35] DOLAN Th. J. (1941). — *Influence des différents paramètres sur les contraintes dans les dents d'engrenage*. Journ. of Applied Physics, vol. 12, n° 8 (août 1941).
Étude des concentrations de contraintes dans les congés de raccordement, donnant les facteurs de concentration pour un certain nombre de congés-type.
- [36] DRUCKER D. C. (1942). — *The Photoelastic Analysis of Transverse Bending of Plates in the standard transmission Polariscope*. J. of Applied Mechanics (déc. 1942), vol. 9, n° 4, trans A.S.M.E., pp. A. 161-164.
Étude des plaques en flexion transversale. Figeage. Découpage en lames sous un angle quelconque. Franges obtenues en fonction de l'angle. Bakélite figée, chauffée à 110°. Étude de plaques percées de trous circulaires, entailles semi-circulaires. Relations générales difficiles à appliquer en raison de leur complexité.
- [37] DUPIN J. (1952). — *Anneau hyperstatique comprimé*. Ingénieurs et Techniciens, n° 46 (1952), pp. 21-24.
Étude d'un anneau considéré comme une plaque découpée dans un cylindre. Charge aux deux extrémités d'un diamètre. Comparaison avec des résultats de résistance des matériaux.

- [38] FISCHER W. A. P. (1948). — *Basic physical properties relied upon in the Frozen stress technique*. Proc. Inst. Mech. Engineers, vol. 158 (1948), pp. 230/35.
- Propriétés classiques du figeage : propriétés des plastiques et des matériaux utilisés. Biréfringence. Utilisation de la résine formaldéhyde et technique du figeage.
- [39] FROCHT M., LEVEN M. M. (1942). — *On the state of stress in thick Bars*. J. of Applied Physics, vol. 13 (1942), pp. 308-313.
- Étude systématique en photoélasticité plane des concentrations de contraintes dans les barreaux entaillés (trous, congés, entailles...). Influence des divers paramètres. Facteurs de concentration de contraintes (courbes).
- [40] HETENYI M. (1943). — *A photoelastic Study of Bolt and Nut Fastenings*. J. of Applied Mechanics (juin 1943), vol. 10, n° 2, trans A.S.M.E., pp. A. 93-100.
- Étude de six formes différentes par figeage. Une détermination de la forme du filetage doit permettre de diminuer les contraintes de 30 %. Modèle figé à trois dimensions, découpé en tranches.
- [41] HEYWOOD R. B. (1948). — *Modern applications of Photoelasticity*. Proc. Inst. Mech. Engineers, vol. 158 (1948), pp. 235-240.
- Description de la technique du figeage à trois dimensions. Propriétés des bakélites (ordre des franges; contrainte maximum, module d'Young). Application : turbine, roue de locomotive. Résultats de détail des techniques utilisées.
- [42] LEVEN M. M. (1948). — *A new material for three dimensionnal Photoelasticity*. Proc. Soc. for Experimental Stress Analysis, vol. 6, n° 1, pp. 19-28.
- Étude systématique des propriétés mécaniques et optiques de trois types de Fostérite. Étude pour figeage. Exemple d'arbres circulaires entaillés. Comparaison avec les résultats fournis par la bakélite BT 61 893.
- [43] MANTLE J. B., DOLAN J. J. (1948). — *A photoelastic study of U — shaped members*. Proc. of Soc. for Exp. Stress Analysis, vol. 6, n° 1, pp. 66-73.
- Étude expérimentale : influence du procédé de coupe; dimensions relatives de la pièce. Variation de la contrainte maximum avec chacune des dimensions (facteur de concentration de contrainte).
- [44] NORRIS C. B., VOSS A. W. (1948). — *An improved photoelastic method for determining plane stresses*. N.A.C.A. T.N. 1 410 (1948).
- La méthode de DRUCKER a été étendue au moyen d'un examen oblique additionnel. Des équations plus simples relient les contraintes principales à l'ordre de frange. Cette méthode est considérée comme étant plus précise que celle de DRUCKER et fournit aussi un moyen de détermination des directions des contraintes principales, détermination qui manque néanmoins de précision.
- [45] S.N.E.C.M.A., GROUPE TECHNIQUE DE SURESNES. — *Mise en œuvre de l'araldite*. Note Technique S.N.E.C.M.A., n° 84, Z. 111, C. 132.
- Compte rendu de mise au point du matériau. Composition. Préparation. Précautions à prendre. Traitements. Résultats (C = 58 B). Possibilité d'observation dans l'étude en cours d'expérience.

2,2 Lumière diffuse.

- [46] KUSKE A. (1951). — *Verfahren der Spannungsoptik (Procédés de photoélasticimétrie)*. Vol. II, I (1951), pp. 56 à 110. U.T.A.C., trad. technique T. 52-74.
- Ouvrage très complet, comprenant notamment : procédé par figeage, appareil pour l'observation en incidence oblique, procédé par couches (résines phénoliques transparente ou gélatine); lumière diffuse (trois dimensions et lumière primaire non polarisée).
- [47] WELLER R. (1939). — *A new Method for photoelasticity in three dimensions*. Journ. Appl. Physics, vol. 10, n° 4 (avril 1939), pp. 266.

2,3 Méthode de FAVRE-MESNAGER.

- [48] FAVRE H. (1930). — *Sur une méthode optique de détermination des tensions intérieures dans les solides à trois dimensions*. C.R.A.S., vol. 190 (1930), pp. 1182/1184.

Premier exposé très succinct de la méthode de FAVRE. Principe.

- [49] FAVRE H. (1932). — *La détermination optique des tensions intérieures*. Revue d'optique, n° 11 (1932).

Rappel des différentes méthodes utilisées en photoélasticité et de leur domaine d'application. Description de la méthode FAVRE : suggestions sur les possibilités d'extension à trois dimensions.

- [50] FAVRE H. (1951). — *Quelques applications récentes de la méthode purement optique à des problèmes d'élasticité plane et à l'étude des plaques fléchies* (Laboratoire de photoélasticité de l'École polytechnique fédérale, Zurich). Conférences faites à l'Institut Technique de la Construction et du Ciment, Madrid (1951).

Exposé des généralités, de la méthode optique avec exemples d'application à des cas concrets : plaque fléchie, flexions de poutres, modèle réduit de massif. La méthode donne : directions des contraintes principales et leur grandeur par intégration graphique. Bibliographie des travaux du Professeur FAVRE.

- [51] FARWELL H. W. (1940). — *Tension and birefringence in a Vinylite Plastic*. Journal of Applied Physics, vol. II (avril 1940), pp. 274/279.

Étude expérimentale des relations contrainte-biréfringence à longueur constante et à charge constante. Pas de conclusion, sinon la non-proportionnalité. Formule approchée.

- [52] HERRMANN G. (1950). — *Experimentelle untersuchung der spannungsverteilung in Platten von Streifenfundamenten — Theoretische untersuchungen über die Durchbiegung parallelogrammförmiger Platten unter zentrischer Einzellast*. Éditions Leemann, Zurich (1950). Publications du Laboratoire de Photoélasticité — École polytechnique fédérale, Zurich. Prof. Dr Henry FAVRE (n° 4).

Étude théorique et pratique de deux modèles plans.

- [53] MESNAGER M. (1930). — *Sur la détermination optique des tensions intérieures dans des solides à trois dimensions*. C.R.A.S., vol. 190 (1930), p. 1249.

Exposé sommaire, signale la méthode TARDY.

2,4 Vernis craquelants.

- [54] DURELLI A. (1942). — *Experimental determination of the isostatic lines*. J. Applied Mechanics (déc. 1942), vol. 9, n° 4, trans A.S.M.E. A. 155-160.

Détermination par vernis craquelants des isostatiques. Précision des résultats à 10 ou 15 % près. Matériau utilisé : stress-coat (magnaflux Company). Étude de barreaux percés (modèles en celluloid).

- [55] GUYOT H. (1950). — *Un nouveau vernis craquelant : « le vernis émail »*. Recherche Aéronautique, n° 17 (1950).

Exposé des limites de la méthode, de la technique (épaisseur; sensibilité; influence des dimensions de la pièce; intervalle d'instabilité). Mode d'emploi et visibilité des craquelures (essais de coloration par électrolyse).

2,5 **Autres méthodes.**

- [56] DANTU M. — *Recherches diverses d'extensométrie et de détermination des contraintes.* Bulletin du G.A.M.A.C., t. II, n° 2.

Mise au point de nouvelles méthodes, appliquées principalement aux coques et aux plaques ; méthode optique d'étude des plaques ; photoplasticité ; extensométrie à trois dimensions ; étude des coques travaillant en flexion : méthode bicouche (un ou deux matériaux), méthode optique. Étude des matériaux pulvérulents.

- [57] DURELLI A. J., LAKE R. L. (1950). — *Nouvelle méthode utilisée en photoélasticité, basée sur la réactivité et dont les possibilités dépassent celles du figeage.* Machine Design (décembre 1950).

Le matériau utilisé est le Catalin. Les modèles requièrent un chauffage vers 95° (four à température constante). Exemple précis, avec conditions d'usinage, d'un arbre cylindrique entaillé. Les auteurs signalent une flexion parasite due au découpage et qu'il est nécessaire d'éliminer. Comme en figeage on découpe des tranches planes au milieu d'un matériau à trois dimensions. Les auteurs donnent les courbes de réactivité.

- [58] GOODIER J., LEE G. (1941). — *An extension of the photoelastic method of stress measurement to plates in transverse Bending.* J. of Applied Mechanics, trans A.S.M.E., vol. 63 (1941), pp. A. 27-29 (discussion du texte p. A. 187).

La méthode photoélastique à deux dimensions est utilisée pour les flexions de plaques en collant deux plaques identiques à l'aide d'une couche fine d'un matériau réfléchissant. La lumière traverse ainsi la moitié de l'épaisseur de la plaque totale, dans laquelle les tensions ne changent pas de signe, de sorte que les observations optiques sont plus nettes. Les essais avec celluloid donnent des résultats satisfaisants mais la liaison bakélite-colle n'est pas suffisante. Lame réfléchissante : métal (aluminium). Adhésif : cellulose dissoute dans alcool, éther, acétone, Gelva 7 et ciments Durez et Duco, ce dernier paraissant le plus satisfaisant. Étude de plaques entaillées.

- [59] MABBOUX G. (1932). — *Applications de la photoélasticimétrie à l'étude des ouvrages en béton.* Revue d'optique, n° 11 (1932), pp. 501-507.

Miroirs faisant corps avec le modèle une fois la prise achevée.

3. — **ÉTUDES PARTICULIÈRES EN PHOTOÉLASTICITÉ A TROIS DIMENSIONS**

- [60] DRUCKER, MINDLIN R. (1940). — *Stress Analysis by three dimensionnal Photoelastic methods.* J. of Applied Physics, vol. 11 (1940), pp. 724-32.

Présentation des deux méthodes principales de photoélasticité à trois dimensions : méthode de figeage avec découpage en lames minces ; méthode de lumière diffuse.

- [61] FROCHT M. (1944). — *Studies in three dimensionnal photoelasticity.* J. Applied Mechanics, trans A.S.M.E., vol. 66 (1944), pp. A. 10-6 — *Proc. Soc. Exp. Stress Analysis*, vol. 2, n° 1, pp. 128-138 (1944).

Étude à trois dimensions, par la méthode du figeage, d'arbres circulaires percés d'un trou en flexion. Comparaison des résultats expérimentaux et théoriques (exposé détaillé).

- [62] FROCHT M. (1944). — *Studies in three dimensionnal photoelasticity. Stress concentrations in shafts with transverse circular holes in tension.* J. of Applied Physics, vol. 15 (1944), pp. 72-88.

Étude très intéressante sur les techniques employées : matériau : bakélite BT 61 893 figée. Exposé de l'effet de temps. Comparaison des méthodes : découpage par tranches et méthode de compensation. Difficultés. Détermination de l'ordre de frange. Comparaison des facteurs de concentration de contrainte à deux et trois dimensions.

- [63] FROCHT M. M. — *Study on tridimensionnal photoelasticity.*

Article important et intéressant sur un essai de détermination des contraintes à trois dimensions, à l'aide du figeage par découpage de deux modèles en tranches perpendiculaires ou un seul modèle. Résolution assez pénible (présence des contraintes de cisaillement). Deuxième méthode : découpage et variation de l'épaisseur après recuit.

- [64] HETENYI (1938). — *The fundamental of three dimensionnal photoelasticity.* Journal of Appl. Mech., vol. 5, n° 4 (1938), pp. A. 149-A. 155; discussion, vol. 6, pp. A. 133/135.

- [65] JESSOP H. T. (1954). — *Congrès de Bruxelles.*

- [66] LE BOITEUX H. (1947). — *Une « Fonction des contraintes » dans les problèmes d'élasticité à trois dimensions.* Centre technique de l'Automobile.

Fonction d'AIRY généralisée.

- [67] LE BOITEUX H. (1947). — *Étude sur l'utilisation des cercles de MOHR dans les problèmes d'élasticité à trois dimensions.* Centre technique de l'Automobile (juillet 1947).

- [68] MINDLIN R. D. (1942). — *Optical aspect of three dimensionnal photoelasticity.* Journal of the Franklin Institute, vol. 233 (1942), pp. 349-64.

Exposé des principes de l'optique cristalline (ellipsoïde de FRESNEL) utilisés en photoélasticité tridimensionnelle. Exposé des techniques utilisées par les différents auteurs. Aucune innovation mais un exposé sérieux des paramètres à déterminer. Très théorique. Bibliographie intéressante. A rapprocher de la référence [21] MINDLIN R. D. (1949) et GOODMAN L. E.

- [69] WELLER R. et BUSSEY J. K. (1939). — *Analyse photoélastique de systèmes soumis à des états de charge à trois dimensions. Utilisation de la lumière diffuse.* N.A.C.A., Note Technique, n° 737 (novembre 1939) — G.R.A., traduction technique, n° 156 (12 juillet 1949).

- [70] WELLER R. (1941). — *Three dimensionnal photoelasticity using scattered light.* J. Applied Physics, vol. 12 (1941), pp. 610-16.

Exposé assez complet du principe, des relations obtenues, des résultats, de leur interprétation, du matériel employé. Signale une méthode d'examen non encore mise en pratique. Exemples précis. Article important.

NOTE SUR LES PROGRAMMES DE CALCUL

Les quelques programmes joints sont relatifs au calculateur électronique Gamma mathématique de la Compagnie des Machines Bull.

Ce calculateur du type série, semi-binaire, effectue les quatre opérations élémentaires à la vitesse de 5 800 par seconde.

Les informations lui sont transmises par cartes perforées à l'aide de diverses machines associées. Les résultats sont livrés par une imprimante à grande vitesse.

Suivant la nature des problèmes, le programme de calcul est, soit affiché préalablement sur des tableaux de connexions, soit introduit dans la machine par cartes perforées : grâce à un code, la machine distingue les cartes-programmes des cartes de données.

Dans tous les programmes joints, on a utilisé le programmation par cartes.

Dans les planches, il sera aisé, pour le lecteur, de suivre les différentes étapes du calcul au fur et à mesure de l'introduction des cartes.

Les nombres sont représentés par trois caractéristiques :

- le signe : symbole 0 pour les nombres négatifs;
- la mantisse;
- l'exposant majoré de 50.

Par exemple, 0 127 988 53 exprime le
 ' nombre — 127 988.

Symbole des différentes colonnes des programmes.

- Numéro de la carte;
- codes;
- ligne : numéro de la ligne où sont inscrits des ordres d'opérations;
- numéro opération : rang de l'ordre sur la ligne;
- opération;
- TO : code relatif à la nature de l'opération effectuée;
- AD : adresse de la mémoire à laquelle s'applique l'opération;
- OD : ordre début : position du début du nombre dans la mémoire;
- OF : ordre fin : position de la fin du nombre;

- MD : mémoire décalage, mémoire de positionnement au cours du calcul;
- 1 : mémoire opérateur du calculateur;
- 2 à 15 : mémoires internes du calculateur dont certaines ont des rôles privilégiés.

Résolution de l'équation $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

La présente méthode repose sur le principe suivant :

— le polynôme $f(x)$ est calculé pour des valeurs de x en progression arithmétique. La raison de cette progression est définie par le calculateur électronique lui-même avec le critère suivant :

- si $f(x_i) \cdot f(x_i + r) > 0$, la raison est inchangée;
- si $f(x_i) \cdot f(x_i + r) < 0$, la raison est multipliée par $-\alpha$, α positif inférieur à 1.

Dans ces conditions, x_i converge vers une racine *réelle* de $f(x) = 0$.

Cette méthode brutale de calcul des valeurs de $f(x)$ est beaucoup plus appropriée au calculateur électronique que les méthodes classiques (NEWTON, GRAEFFE, etc.).

Une étude plus complète a été publiée par ailleurs (référence, p. 37).

*
* *

Dans le cas présent, b , c , d sont stockés en mémoires 13, 14, 15 (programme précédent).

Les cartes 101 et 102 introduisent les données de départ arbitraires x et r (cartes de données code 8, colonne 6). La carte 103 commande le calcul de $x_i + r$ puis le calcul de x^3 , bx^2 , cx . La carte 104 effectue l'addition $x^3 + bx^2 + cx + d$, puis sur la ligne 2, $f(x_i) \cdot f(x_i + r)$ dont le signe est examiné ligne 12.

La présence du code de signe déclenche éventuellement la multiplication de la raison par $-0,1$, etc.

PLANCHES I A XV

— —

PLANCHE I

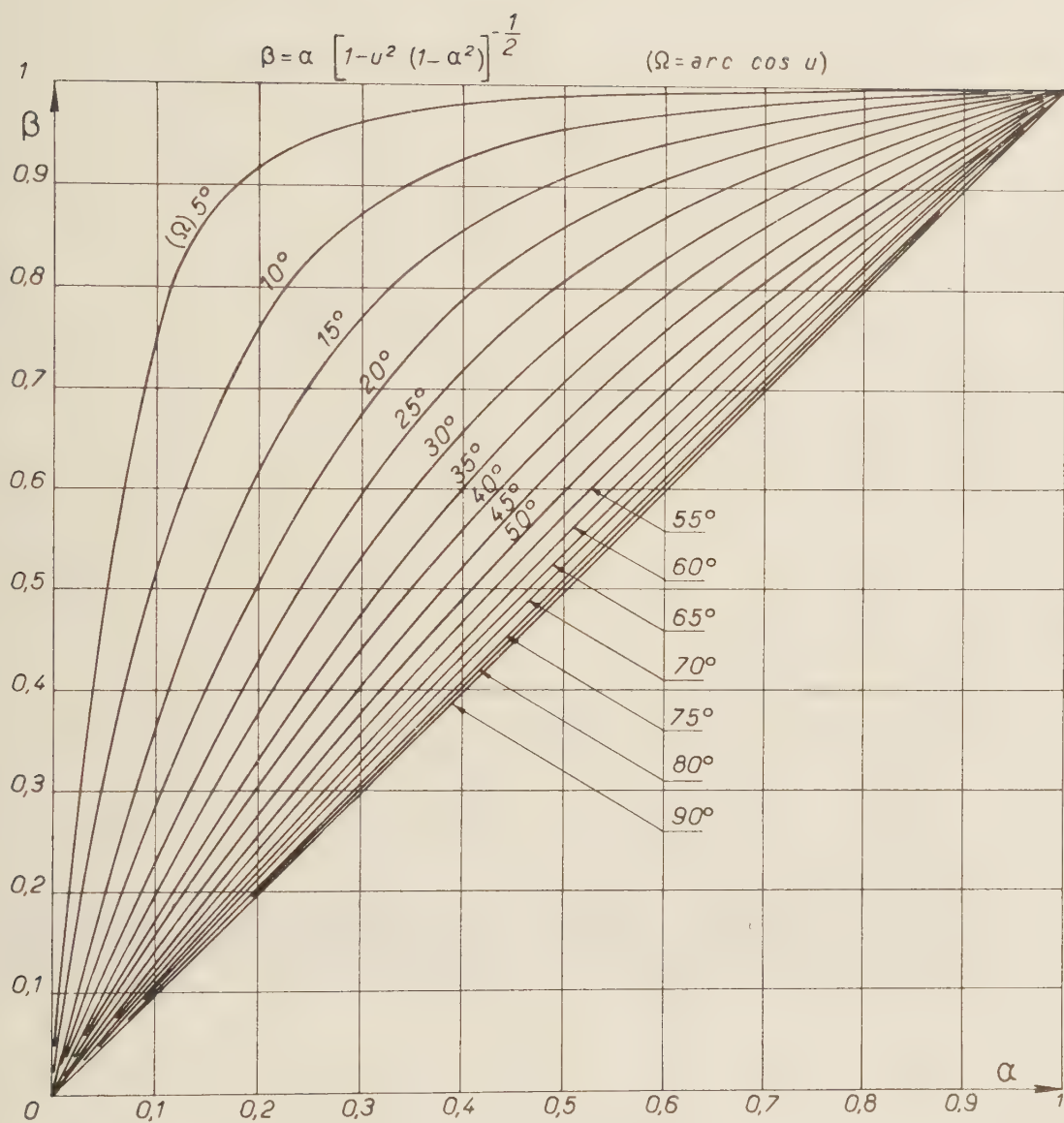


Fig. 35

8	Transf.	6	5	0	2
	Addit.	10	0	0	1
	Addit.	10	0	1	5
	Division	13	0	2	2
7	Transf.	8	6	0	2
	Comp.	9	0	2	1
	Transf.	6	5	2	11
6	Saut	0	3	15	4
	Décal.	2		3	
	Transf.	8	6	2	
	Transf.	8	5	1	
5	Addit.	10		9	2
	Comp.	9		10	1
	Saut		3	15	12
	Transf.	8	6	2	
4	Transf.	6	5	1	
	Décal.	2			
	Division	15	6	2	
3	Transf.	6	2	2	
	Addit.	10	6	2	
	Multipl.	12		2	
	Multipl.	12		10	5
2	Transf.	6	1	1	
	Transf.	8	6	2	11
1	Transf.	6	5	1	
	Décal.	2			
	Division	15	6	2	
0	Transf.	6	2	2	
	Addit.	10	6	2	
	Multipl	12		2	
	Multipl.	12		10	5

PLANCHE III

Programme : I

Formule : $\beta = \alpha [1 - u^2 (1 - \alpha^2)]^{-1/2}$

Page :

N° CARTE	CODÉS	LIGNE	N° OP.	OPÉRATION	T0	AD	OD	OF	Md	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
005		11		Transf.	6	1	1																	
				Transf.	8	6	2																	
				Transf.	6	5	1																	
				Décal.	2																			
				Division	15	6	2																	
				Transf.	6	2	2																	
				Addit.	10	6	2																	
				Multipl.	12		2																	
				Multipl.	12		10	5																
				Transf.	6	1	1																	
				Transf.	8	6	2																	
				Transf.	6	5	1																	
				Décal.	2																			
				Division	15	6	2																	
				Transf.	6	2	2																	
				Addit.	10	6	2																	
				Multipl.	12		2																	
				Multipl.	12		10	5																
				Transf.	6	1	1																	
				Transf.	8	6	2																	
				Transf.	6	5	1																	
				Décal.	2																			
				Division	15	6	2																	
				Transf.	6	2	2																	
				Addit.	10	6	2																	
				Multipl.	12		2																	
				Multipl.	12		10	5																
				Transf.	6	1	1																	
				Transf.	8																			
				Transf.	6	5	1																	
				Décal.	2																			
				Division	15	6	2																	
				Transf.	6	2	2																	
				Addit.	10	6	2																	
				Multipl.	12		2																	
				Multipl.	12		10	5																
				Transf.	6	1	1																	
				Transf.	8	6	2																	
				Transf.	6	5	1																	
				Décal.	2																			
				Division	15	6	2																	
				Transf.	6	2	2																	
				Addit.	10	6	2																	
				Multipl.	12		2																	
				Multipl.	12		10	5																
				Transf.	6	1	1																	
				Transf.	8	6	2																	
				Transf.	6	5	1																	
				Décal.	2																			
				Division	15	6	2																	
				Transf.	6	2	2																	
				Addit.	10	6	2																	
				Multipl.	12		2																	
				Multipl.	12		10	5																
				Transf.	6	1	1																	
				Transf.	8	6	2																	

PLANCHE III

Programme : I

$$\text{Formule : } \beta = \alpha [1 - u^2(1 - \alpha^2)]^{-1/2}$$

Page :

[illegible]

006	9/6 Impression de β	9	Transf.	6	5	1	1 2 0 0
			Décal.	2		2	
			Division	15	6		
			Transf.	6	2	2	
			Addit.	10	6	2	
			Multipl.	12		2	
			Multipl.	12		10	
			Transf.	6	1	1	
			Transf.	8	6	2	
			Transf.	6	6		
	12		Transf.	8	7		1 2 0 0
			Effact ^t	3	3		
			Effact ^t	3	4		
			Effact ^t	3	1		
			Effact ^t	3	2		
			Effact ^t	3	5		
			Effact ^t	3	6		
			Effact ^t	3	7		
			Effact ^t	3			
			Effact ^t	3			

Programme : II (suite) Coefficients de l'équation : $(1 - \lambda)^2 u^2 \alpha^2 + (1 - \lambda^2) u^2 \alpha^2 - \lambda (2 - \lambda) (1 - u^2) \alpha - \lambda^2 (1 - u^2) = 0$ Page :

N° CARTE	CODE	LIGNE	N° OP.	OPÉRATION	TO	AD	OD	OF	MD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
004 (suite)		3		Transf.	8	14				λ^2														
				Transf.	6	8																		
				Transf.	8	5																		
				Transf.	6	9								λ^2										
		2		Transf.	8	6																		
				Transf.	0	0																		
				Multipl.	0	0																		
		0		Effect	3	5																		
				Soustr.	0	0																		
				Transf.	8	5																		
005				Transf.	6	10																		
				Transf.	8	6																		
				Division	0	0																		
		9		Transf.	8	15																		
				Effect	3	3																		
				Effect	3	4																		
				Effect	3	5																		
		8		Effect	3	6																		
				Effect	3	7																		
				Effect	3	7																		

Les coefficients de l'équation : $\alpha^3 + b \alpha^2 + c \alpha + d = 0$ se trouvent donc en mémoires 13, 14, 15

Programme : III Résolution de l'équation : $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ Page :

N° CARTE	CODE	LIGNE	N° OP.	OPÉRATION	TO	AD	OD	OF	MD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
101	8/6																							
102	8/6																							
103		9		Effect ^t	3	12																		
				Conste	4	12	11	10																
				Transf.	6	3				x														
				Transf.	8	5																		
		8		Conste	4	12	10	1						x										
				Conste	4	12	1	5																
				Addit.	0	0	1	1		x														
		6		Transf.	8	5																		
				Transf.	6	14				c														
				Transf.	8	6																		
				Multipl.	0	0	9	1		cx														
		4		Transf.	8	8																		
				Transf.	6	13				b														
				Transf.	8	6																		
				Multipl.	0	0	9	1		bx														
	2			Multipl.	0	0	9	1		bx ²														
	0			Transf.	8	9																		
				Transf.	6	5				x														
				Transf.	8	6																		
				Multipl.	0	0	9	1		x ²														
	12			Transf.	6	5				x														
				Transf.	8	3																		
				Transf.	8	7																		
				Multipl.	0	0	9	1		x ³														
104		9		Transf.	6	9				bx ²														

> x <

> r <

///

—

-0,1

> bad <

bx²

cx

c

cx

b

bx

x

x

x²

x

x³

bx²

9/6	7	Transf.	8	5	1	$x^3 + bx^2$	bx^2	
		Addit.	0	0	1			
		Transf.	6	8		cx		
		Transf.	8	5			cx	
		Addit.	0	0	1	$x^3 + bx^2 + cx$		
		Transf.	6	15		d		
		Transf.	8	5			y_0	
		Addit.	0	0	1			
		Transf.	6	11			y_{-1}	
		Transf.	8	5				y_0
11	0	Transf.	6	6				
		Transf.	8	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
12	11	Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
113	9/6	Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
114	11/1	Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				
		Transf.	8	5				
		Transf.	6	11				

Examen du signe de la mémoire 1

... Les autres lignes identiques à 103

Identique à la carte 104, sauf la ligne 0

La carte 114 est suivie d'une carte 113 (Imp. de y)

PLANCHE VII

I = 0 *Isoclines*

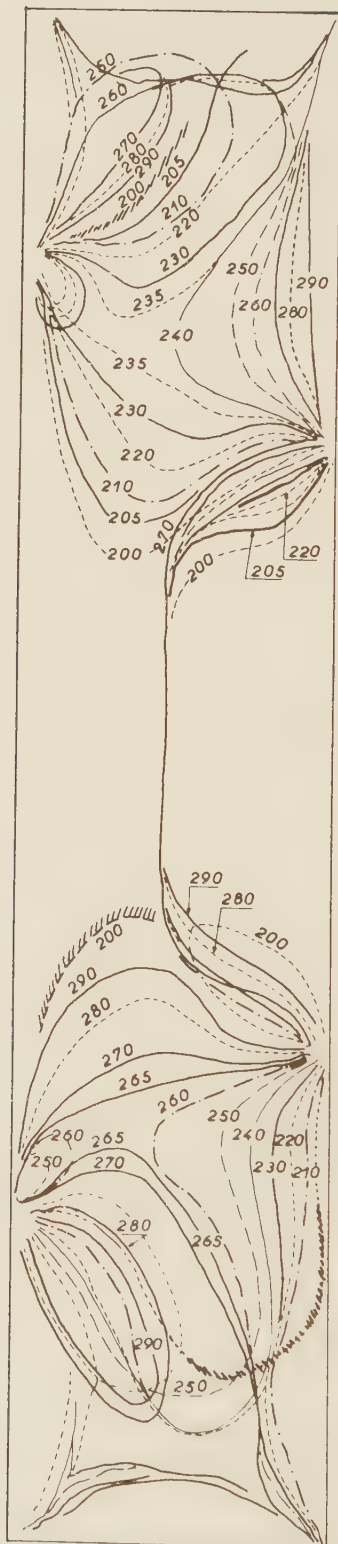


Fig. 36

PLANCHE VIII

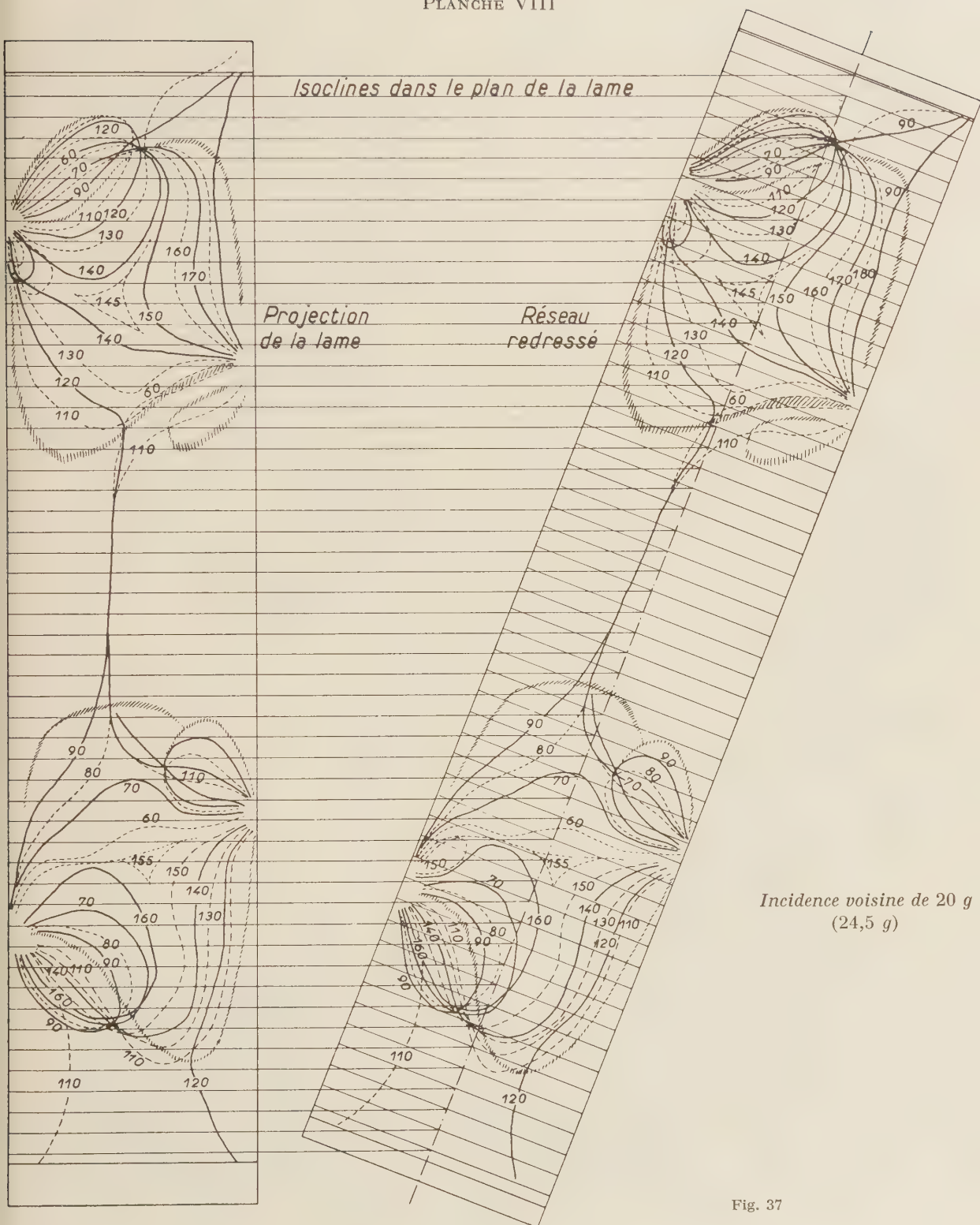


Fig. 37

PLANCHE IX

$l = 49g$

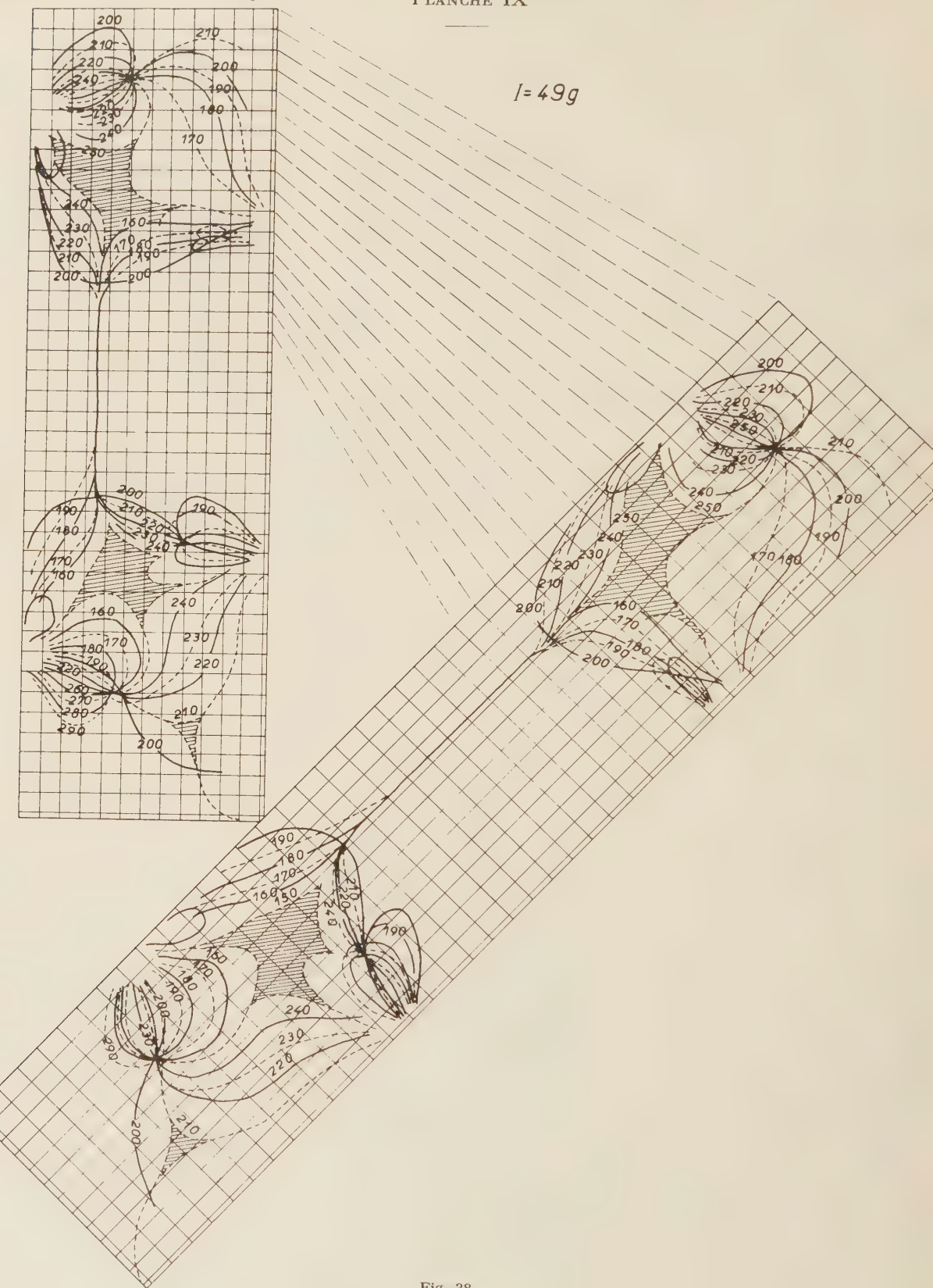


Fig. 38

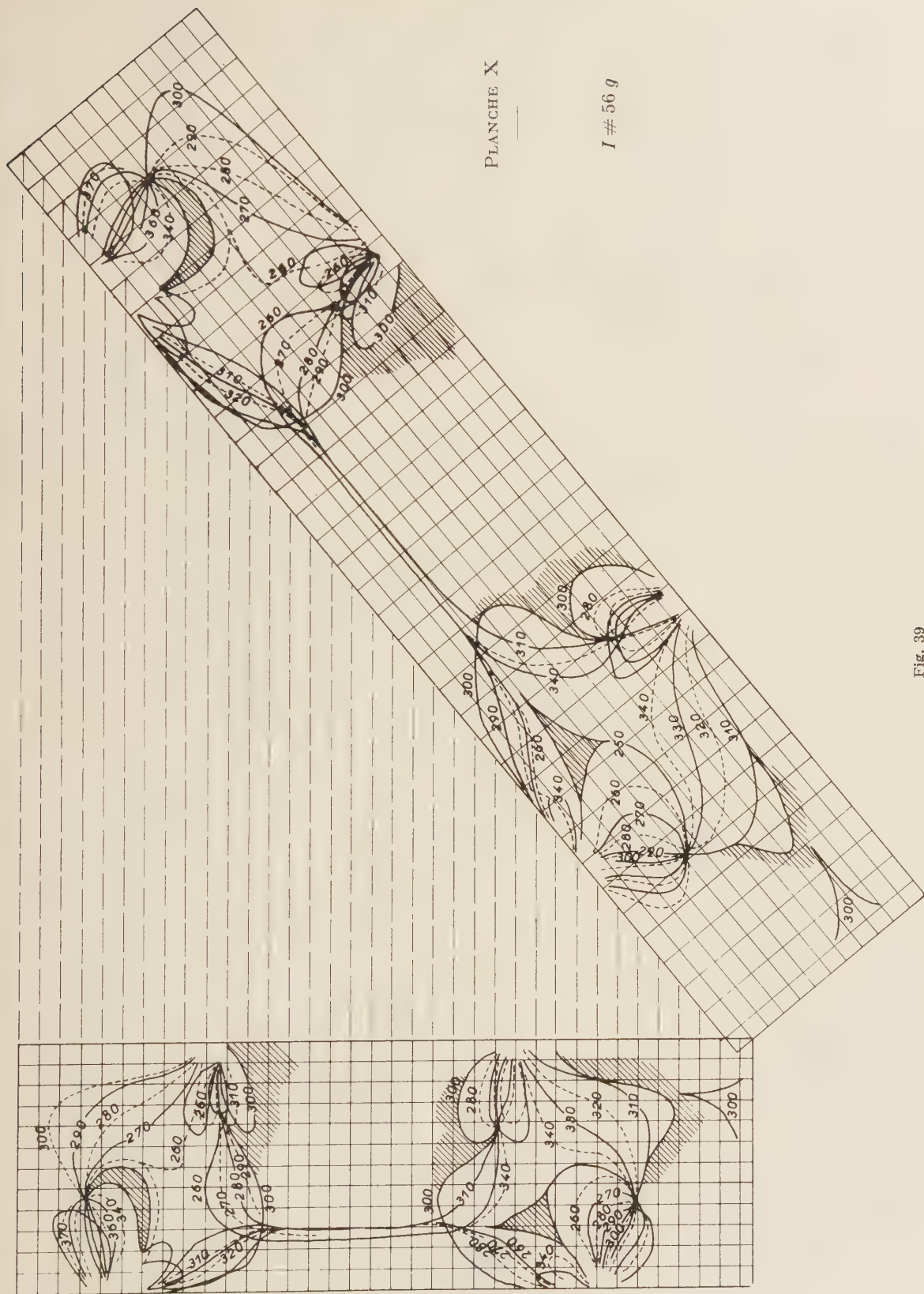


Fig. 39

Regroupement des « points neutres apparents » dans le plan du feuillet

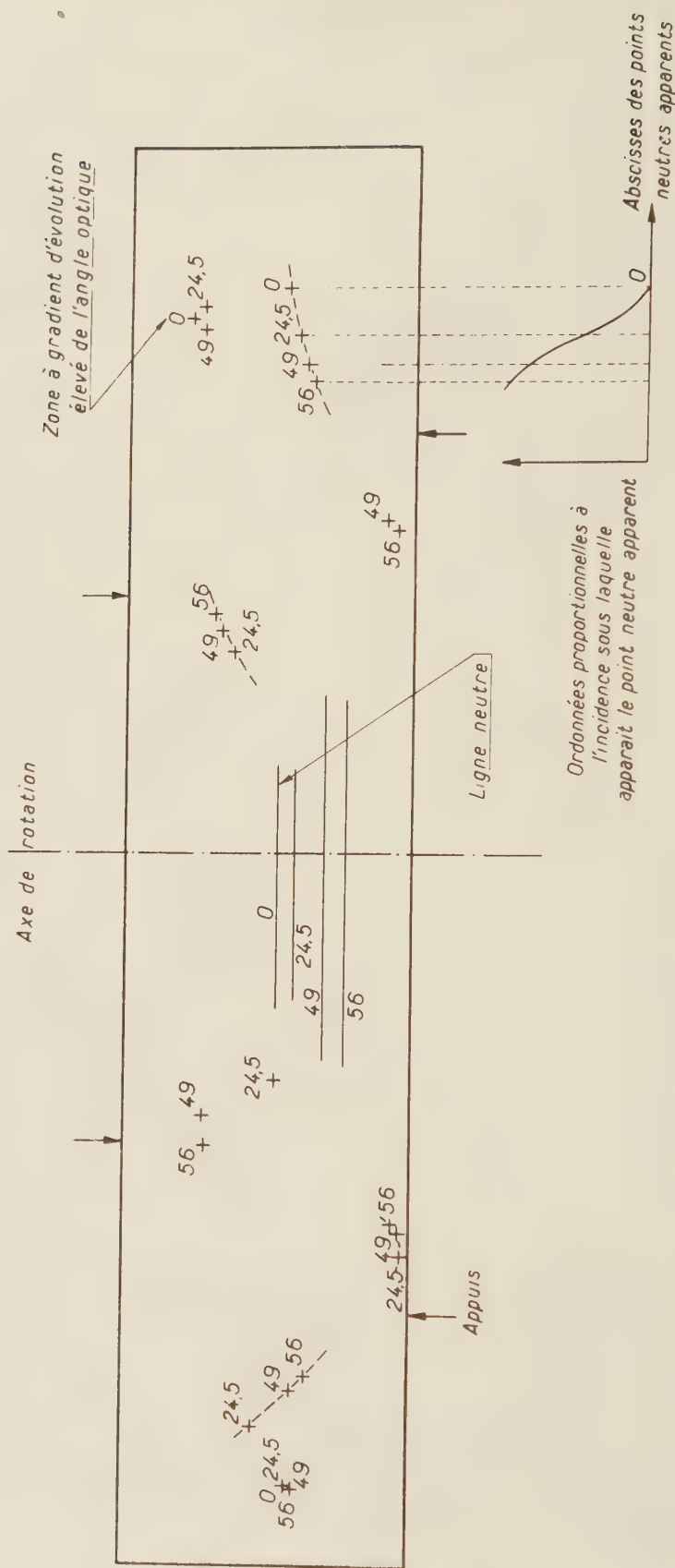


Fig. 40

PLANCHE XII

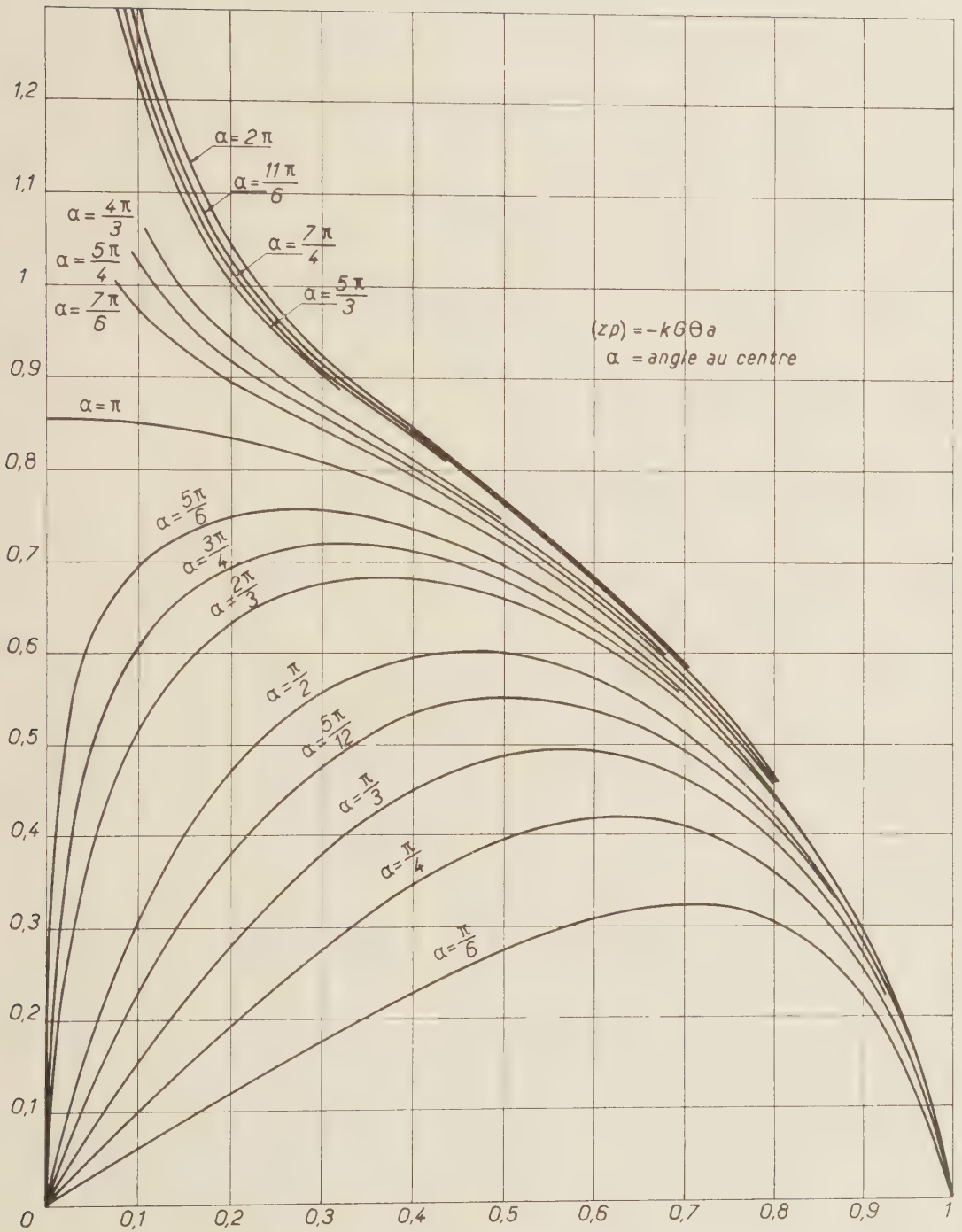
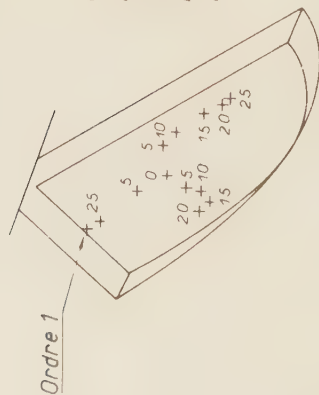
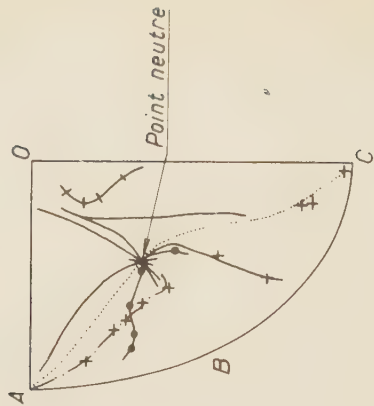
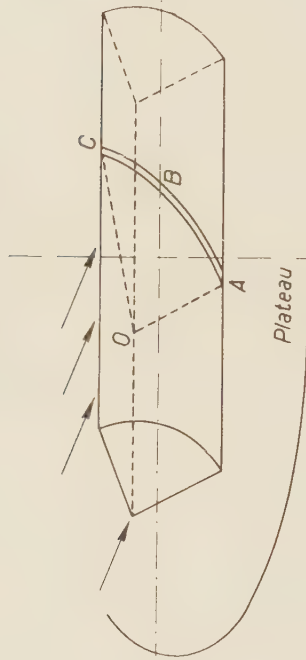


Fig. 41

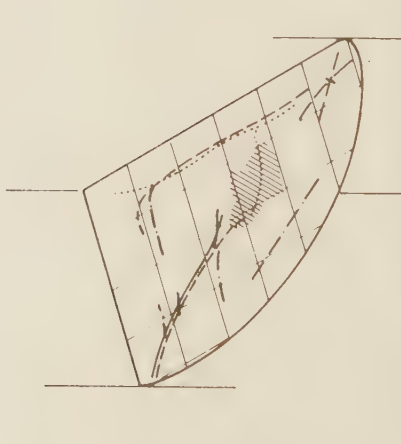


ISOCHROME
 Plateau : 350 g
 Modèle : 267 g
 Repérage des ordres
 fractionnaires sur
 l'isocline 300

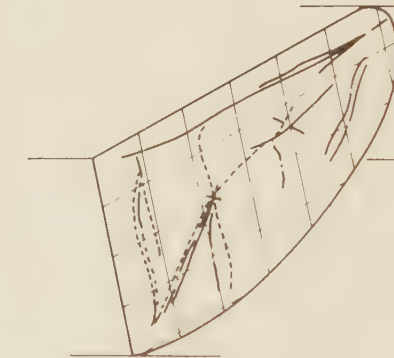


Relevé dans le plan du feuillet

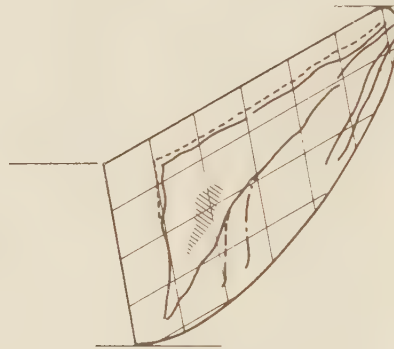
Isoclines : pour une position de la pièce



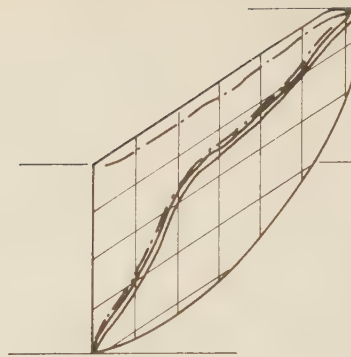
Plateau 335 g
 Pièce 0



340 0



325 0



310 0

Fig. 44

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

APPLICATION
DES MACHINES A CALCULER MODERNES
AU CALCUL DES CONTRAINTES
A PARTIR DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX
DE LA PHOTOÉLASTICIMÉTRIE

Vu et approuvé :

Paris, le 16 juin 1955

Le Doyen de la Faculté des Sciences de Paris :

J. PÉRÈS.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris :

J. SARRAILH.



IMPRIMERIE



IMPRIMERIE